Aufgabe	A29	A30	A31	A32	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 29. (i) Es ist $|X_n| \in \mathcal{A}^+$, damit folgt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n|\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

Damit folgt mit 20.13. $\mathbb{P}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n| = \infty\right) = 0$ und damit

$$\mathbb{P}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n| < \infty\right) = 1.$$

(ii) Es ist analog zu (i)

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right|\right) \le \mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n|\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

Also $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n \mathscr{L}_1$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \in \mathscr{L}_1$.

(iii) Setze $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^n X_k$. Es gilt $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_k \in \overline{\mathcal{A}}$ und

$$|S_n| = \left|\sum_{k=1}^n X_k\right| \le \sum_{k=1}^n |X_k| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \in \mathscr{L}_1.$$

Insbesondere folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \in \mathscr{L}_1$.
Wegen Monotonie der Erwartung

$$\mathbb{E}(|S_n|) \le \mathbb{E}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |X_k|\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_k|) < \infty.$$

Also ist $S_n \in \mathscr{L}_1$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt mit dominierter Konvergenz im letzten Schritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_n) \\
&\overset{\text{Linearität}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 30. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbb{P}(X > y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^\infty \int_y^\infty \mathbb{f}^X(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{f}^X(x)\mathbb{1}_{x>y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Fubini

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \mathbb{f}^X(x)\mathbb{1}_{x>y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \mathbb{f}^X(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty x\mathbb{f}^X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega X(\omega)\mathbb{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \int_y^\infty \mathbb{f}^X(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty \int_y^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=n}^\infty \mathbb{p}^X(k) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=n}^\infty (1-p)^{k-1}p \\ &= \sum_{n=1}^\infty p(1-p)^{n-1} \sum_{k=0}^\infty (1-p)^k\end{aligned}$$

geometrische Reihe

$$\begin{aligned}&= \sum_{n=1}^\infty p(1-p)^{n-1} \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= \sum_{n=1}^\infty (1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

geometrische Reihe

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

Aufgabe 31. (a) Es ist

$$\begin{aligned}&\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = 0 \\ \overset{(X-\mathbb{E}(X))^2 \in \overline{\mathcal{A}}^+}{\iff} \quad & 1 = \mathbb{P}\left((X-\mathbb{E}(X))^2 = 0\right) = \mathbb{P}\left(X - \mathbb{E}(X) = 0\right) = \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)).\end{aligned}$$

(b)
- Es gilt nach Definition

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) &= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}(Y))(X - \mathbb{E}(X))\right] \\ &= \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X).\end{aligned}$$

- Mit Linearität der Erwartung folgt direkt

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathrm{ov}(aX+bY,Z) &= \mathbb{E}\left[(aX+bY - \mathbb{E}(aX+bY)(Z - \mathbb{E}(Z))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(a(X - \mathbb{E}(X)) + b(Y - \mathbb{E}(Y)))(Z - \mathbb{E}(Z))\right] \\ &= a\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Z-\mathbb{E}(Z))] + b\mathbb{E}[(Y-\mathbb{E}(Y))(Z-\mathbb{E}(Z))] \\ &= a\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Z) + b\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,Z).\end{aligned}$$

- Mit Monotonie der Erwartung im letzten Schritt folgt

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))] = \mathbb{E}[\underbrace{(X - \mathbb{E}(X))^2}_{\geq 0}] \geq 0.$$

- Es gilt $\mathbb{E}(a) = a$, also

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(a, X) = \mathbb{E}\left[(a - \mathbb{E}(a))(X - \mathbb{E}(X))\right] = \mathbb{E}(0) = 0.$$

(c)
- Mit der Linearität der Kovarianz und der letzten Eigenschaft in (b) folgt sofort

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}(aX + b) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}(aX + b, aX + b) \\ &\overset{\text{linear}}{=} a\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, aX + b) + \underbrace{\mathbb{C}\mathrm{ov}(b, aX + b)}_{=0 \text{ (b.4)}} \\ &\overset{\text{linear}}{=} a^2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X) + \underbrace{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, b)}_{=0 \text{ (b.4)}} \\ &= a^2\mathbb{V}\mathrm{ar}(X). \end{aligned}$$

- Mit Linearität und Symmetrie folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) &= \mathbb{C}\mathrm{ov}(X + Y, X + Y) \\ &= \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, X) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, X) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Y) \\ &= \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y). \end{aligned}$$

Aufgabe 32. (a) Wir definieren den Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{(i_1, \ldots, i_n) | i_j \in \{1, \ldots, m\}\}$ als die Menge aller n-Tupel mit Werten zwischen 1 und m, wobei das j-te Element eines Tupels angibt, welche Ente der j-te Jäger gewählt hat. Dann enthält das Ereignis

$$A_i \coloneqq \{(i_1, \ldots, i_n) \in \Omega, i \neq i_l \forall l \in \{1, \ldots, n\}\}$$

alle Elementarereignisse, in denen die i-te Ente nicht getroffen wird. Die Zufallsvariable $X_i \colon \Omega \to \{0, 1\}, \omega \mapsto \mathbb{1}_{A_i}$ gibt an, ob die i-te Ente überlebt (1) oder nicht (0). Dann ist durch $X \coloneqq \sum_{i=1}^m X_i$ gerade die Anzahl der überlebenden Enten gegeben. Es gilt aufgrund der Linearität des Erwartungswerts

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(\nVdash_{A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\#A_i}{\#\Omega} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{(m-1)^n}{m^n} \\ &= m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n \end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen zunächst

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_i X_j) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{A_j}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i \cap A_j}) \\ &= \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \end{aligned}$$

Für $i = j$ gilt $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) = m\left(\frac{m-1}{m}\right)^n$. Sei also $i \neq j$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\#A_i \cap A_j}{\#\Omega} \\
&= \left(\frac{m-2}{m}\right)^2
\end{aligned}
$$

Es gilt daher

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^m X_i \sum_{j=1}^m X_j\right) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^m X_i X_j\right) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \sum_{i,j=1}^m \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X_i X_i) + \sum_{i\neq j, 1\leq i,j\leq m} \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n + (m^2 - m)\left(\frac{m-2}{m}\right)^2 - m^2 \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{2n}
\end{aligned}
$$

(c) Für $n = m = 50$ gilt $7^{-2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \approx 0.0996$ und $\mathbb{E}(X) \approx 18.2$. Für $m_1 = 11, m_2 = 26$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in [m_1, m_2]) &\geq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \leq 7) \\
&= 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 7)
\end{aligned}
$$

Ungleichung von Tschebycheff

$$
\begin{aligned}
&\geq 1 - 7^{-2}\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \\
&\geq 1 - 0.0996 \\
&\geq 0.9
\end{aligned}
$$