

Aufgabe	A25	A26	A27	A28	Σ
Punkte					

Aufgabe 26. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{f}^{X+Y}(z) &= [\mathbb{f}^X * \mathbb{f}^Y](z) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^X(z-x) \mathbb{f}^Y(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}((z-x)-\mu_1)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2} dx
 \end{aligned}$$

Durch die Substitution $x \mapsto x + \mu_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}((z-x)-(\underbrace{\mu_1+\mu_2}_{=: \mu}))^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-z+\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} dx
 \end{aligned}$$

Wir substituieren $z = z - \mu$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{f}^{X+Y}(z+\mu) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-z)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right) x^2 - 2\frac{1}{\sigma_1^2}xz + \frac{1}{\sigma_1^2}z^2 \right]} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \left[x^2 - 2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}xz + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}z^2 \right]} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \left[\left(x - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}z \right)^2 - \frac{\sigma_2^4}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2}z^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}z^2 \right]} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \left[\left(x - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}z \right)^2 \right]} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} + \sigma_1^2 \right] z^2} dx
 \end{aligned}$$

Substitution $x := x + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}z$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} x^2} dx \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} + \frac{1}{\sigma_1^2} \right] z^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \cdot e^{-\frac{1}{2} \left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \right] z^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}z^2}
 \end{aligned}$$

Resubstitution $z := z + \mu = z + \mu_1 + \mu_2$

$$\mathbb{f}^{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(z - (\mu_1 + \mu_2))^2}$$

Daraus folgt $X + Y = N_{(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}$.

(b) Es ist bekannt, dass $n \cdot \overline{X_n} = \sum_{i=1}^n X_i \sim N_{(n\mu, n\sigma^2)}$ für $X_i \sim N_{(\mu, \sigma^2)}$. Wir betrachten nun

$h(X) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}X - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$. Nach dem Transformationssatz gilt dann für $Z_n = h(n \cdot \bar{X}_n)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^{Z_n}(y) &= \sqrt{n\sigma^2} \frac{1}{2\pi n\sigma^2} e^{-\frac{1}{2n\sigma^2}(\sqrt{n\sigma^2}(y + \sqrt{n}\sigma^{-1}\mu) - n\mu)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2n\sigma^2}(\sqrt{n\sigma^2}y + n\mu - n\mu)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2n\sigma^2} \cdot n\sigma^2 y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

Daher gilt $Z_n \sim N_{(0,1)}$.

Aufgabe 28. (a) Nach dem Dichtetransformationssatz gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^{AX+b}(y) &= \frac{1}{|\det(A)|} \mathbb{f}^X(A^{-1}(y-b)) \\ &= \det AA^t^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det \Sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle \Sigma^{-1}(A^{-1}(y-b) - \mu), A^{-1}(y-b) - \mu \rangle} \\ &= \det A \Sigma A^t^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle \Sigma^{-1} A^{-1}(y - (A\mu+b)), A^{-1}(y - (A\mu+b)) \rangle} \\ &= \det A \Sigma A^t^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle A^{-t} \Sigma^{-1} A^{-1}(y - (A\mu+b)), (y - (A\mu+b)) \rangle} \\ &= \det A \Sigma A^t^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle (A \Sigma A^t)^{-1}(y - (A\mu+b)), (y - (A\mu+b)) \rangle} \end{aligned}$$

Daher gilt $AX + b \sim N_{A\mu+b, A\Sigma A^t}$.

- (b) Wir definieren E_{ij} mit $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Dann erhalten wir durch $P_{ij} = \sum_{i=1}^n E_{ii} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ eine Permutationsmatrix. Für $Y = P_{1i}X$ gilt $Y \sim N_{(P_{1i}\mu, P_{1i}\Sigma P_{1i})} = N_{(P_{1i}\mu, \Sigma)}$. Da $\Sigma = LDL^t$ für eine normiert untere Dreiecksmatrix L und eine Diagonalmatrix D , erhalten wir

$$L^{-1}Y - L^{-1}P_{1i}\mu \sim N_{(L^{-1}\mu - L^{-1}\mu, L^{-1}LDL^tL^{-t})} = N_{(0,D)}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^{(L^{-1}Y - L^{-1}P_{1i}\mu)_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^{L^{-1}Y - L^{-1}P_{1i}\mu}(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot (\det D)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle D^{-1}x, x \rangle} dx_n \dots dx_2 \\ &= (\det D)^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=2}^n D_{ii}^{-1} x_i^2} \\ &= \frac{\sqrt{D_{22}} \dots \sqrt{D_{nn}}}{\sqrt{\det D}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{11}^{-1} x_1^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{11}}} e^{-\frac{1}{2D_{11}} x_1^2} \\ \mathbb{f}^{X_i - \mu_i}(x_i) &\sim N_{(0, D_{11})} = N_{(0, Y_{11})} = N_{(0, X_{ii})} \\ \mathbb{f}^{X_i} &\sim N_{(\mu_i, X_{ii})} \end{aligned}$$

(c) c