Aufgabe	A17	A18	A19	A20	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 17. Beh.: $\varphi = \mathbb{1}_{A_k}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ ist bester Test zum Niveau $\mathbb{P}_0(A_k) \in [0,1]$.

Beweis. Sei $\tilde{\varphi} = \mathbb{1}_{\tilde{A}}$ ein Test zum Niveau $\mathbb{P}_0(A_k)$, d.h. $\mathbb{P}_0(\tilde{\varphi} = 1) = \mathbb{P}_0(\tilde{A}) \le \mathbb{P}_0(A_k) = \mathbb{P}_0(\varphi = 1)$ (**).

Z.z.: $\mathbb{P}_1(\tilde{\varphi} = 0) = \mathbb{P}_1(\tilde{A}^c) \ge \mathbb{P}_1(A_k^c) = \mathbb{P}_1(\varphi = 0)$.

Es ist $x \in A_k \iff \mathbb{f}_1(x) - k\mathbb{f}_0(x) \ge 0$, also $x \in A_k^c \iff \mathbb{f}_1(x) - k\mathbb{f}_0(x) < 0$ $(*)$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(A_k) - k\mathbb{P}_0(A_k) &= \int_{A_k} [\mathbb{f}_1(x) - k\mathbb{f}_0(x)]\,\mathrm{d}x \\
&\ge \int_{A_k \cap \tilde{A}} [\mathbb{f}_1(x) - k\mathbb{f}_0(x)]\,\mathrm{d}x \\
&\ge \int_{A_k \cap \tilde{A}} [\mathbb{f}_1(x) - k\mathbb{f}_0(x)]\,\mathrm{d}x + \int_{A_k^c \cap \tilde{A}} \underbrace{[\mathbb{f}_1(x) - k\mathbb{f}_0(x)]}_{<0\ (*)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\tilde{A}} [\mathbb{f}_1(x) - k\mathbb{f}_0(x)]\,\mathrm{d}x \\
&= \mathbb{P}_1(\tilde{A}) - k\mathbb{P}_0(\tilde{A}).
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\mathbb{P}_1(A_k) - \mathbb{P}_1(\tilde{A}) \ge k(\mathbb{P}_0(A_k) - \mathbb{P}_0(\tilde{A})) \overset{(**)}{\ge} 0.$$

Es ist also $\mathbb{P}_1(A_k) \ge \mathbb{P}_1(\tilde{A})$, insgesamt

$$\mathbb{P}_1(A_k^c) = 1 - \mathbb{P}_1(A_k) \le 1 - \mathbb{P}_1(\tilde{A}) = \mathbb{P}_1(\tilde{A}^c).$$

Also Fehler 2. Art minimiert und damit φ bester Test zum Niveau $\mathbb{P}_0(A_k)$. □

Aufgabe 18. (a) Der Neyman-Pearson-Test $\varphi\colon \mathbb{R} \to \{1, 0\}$ ist gegeben durch $\mathbb{1}_{A_{k_\alpha}}$ mit

$$A_{k_\alpha} = \{x \in \mathbb{R} | \mathbb{f}_1(x) \ge k_\alpha \mathbb{f}_0(x)\} = \{x \in \mathbb{R} | \mathbb{f}_1(x)/\mathbb{f}_0(x) \ge k_\alpha\},$$

wobei wir zeigen werden, dass ein k_α existiert mit $\mathbb{P}_0(A_{k_\alpha}) = \alpha$. Dabei ist der Likelihoodquotient $L(x) = \frac{\mathbb{f}_1(x)}{\mathbb{f}_0(x)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} e^{\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda_1}\right)x}$ stetig und wegen $\lambda_0 < \lambda_1 \implies \frac{1}{\lambda_0} > \frac{1}{\lambda_1}$ auch monoton wachsend. Insbesondere existiert zu jedem k_α genau ein c_α mit

$$A_{k_\alpha} = [c_\alpha, \infty).$$

Dann gilt

$$\alpha \overset{!}{=} \mathbb{P}_0(A_{k_\alpha}) = \int_{A_{k_\alpha}} \mathbb{f}_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0} e^{-\frac{1}{\lambda_0}x}\,\mathrm{d}x = e^{-\frac{1}{\lambda_0}c_\alpha}$$

Daher gilt $c_\alpha = -\lambda_0 \log(\alpha)$ und damit $\varphi = \mathbb{1}_{[-\lambda_0 \log(\alpha), \infty)}$

(b) Offensichtlich ist also φ unabhängig von λ_1. Sei $\lambda < \lambda_0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_\lambda(A_{k_\alpha}) = \int_{-\lambda_0 \log(\alpha)}^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{1}{\lambda}x}\,\mathrm{d}x = e^{\frac{\lambda_0}{\lambda}\log(\alpha)} = \alpha^{\frac{\lambda_0}{\lambda}} < \alpha,$$

da $\alpha < 1$. Damit hält φ für $H_0 : \lambda \le \lambda_0$ das Signifikanzniveau α ein und ist folglich gleichmäßig bester Test mit $H_1 : \lambda > \lambda_0$, da für alle $\lambda_1 > \lambda_0$ nach dem Neyman-Pearson-Lemma φ ein bester Test ist.

(c) Die Forscher liegen falsch, wenn die Nullhypothese $\lambda \le \lambda_0$ wahr ist und sie diese ablehnen. Das ist also gerade ein Fehler erster Art und wir erhalten $\alpha = 0.05$. Damit ist $\varphi = \mathbb{1}_{[-\lambda_0 \log(\alpha), \infty)} = \mathbb{1}_{[15,7917, \infty]}$. Wegen $\varphi(X) = \varphi(13) = 0$ publizieren sie ihre Ergebnisse nicht.

(d) Es gilt $\mathcal{R}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda^c = (0,\lambda)^c = [\lambda, \infty)$. Die assoziierte Familie von Partitionen ist

$$\mathscr{H}_\lambda^0 := \{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+ : \lambda \in \mathcal{R}_{\tilde{\lambda}}\} = \{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+ : \lambda \geq \tilde{\lambda}\} = (-\infty, \tilde{\lambda}]$$

und analog

$$\mathscr{H}_\lambda^1 := \{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+ : \lambda \in \mathcal{F}_{\tilde{\lambda}}\} = \{\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^+ : \lambda < \tilde{\lambda}\} = (\tilde{\lambda}, \infty).$$

Nach Aufgabe b wissen wir, dass $\varphi_\lambda = \mathbb{1}_{[-\lambda\log(\alpha)]}$ ein gleichmäßig bester Test zum Niveau α mit Nullhypothese $\mathscr{H}_\lambda^0$ gegen die Alternative $\mathscr{H}_\lambda^1$ ist. Nach Satz 12.33 muss damit die assoziierte Bereichsschätzfunktion B ein gleichmäßig bester $(1-\alpha)$-Konfidenzbereich sein. Die assoziierte Bereichsschätzfunktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} B(x) &= \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \varphi_\lambda(x) = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{1}_{[-\lambda\log(\alpha),\infty)} = 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : x < -\lambda \log(\alpha)\} \end{aligned}$$

$\log(\alpha) < 0$

$$\begin{aligned} &= \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : \, -x/\log(\alpha) < \lambda\} \\ &= \left(-\frac{x}{\log(\alpha)}, \infty\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 19. (a) Beh.: $\hat{\theta}_n(x) = (\overline{x}_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_n)^2)$.

Beweis. Betrachte für $\sigma^2 > 0$:

$$\begin{aligned} L(x,\mu,\sigma^2) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right) \\ l(x,\mu,\sigma^2) &= \log L \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\log(2\pi\sigma^2) \end{aligned}$$

Es genügt die Maxima von $l = \log L$ zu betrachten, da der Logarithmus streng monoton wachsend ist. Betrachte den Gradienten bezüglich μ und σ^2:

$$\nabla l(x,\mu,\sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n 2(x_i-\mu) \\ \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0.$$

Damit folgt

$$\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 = \frac{n}{\sigma^2} \implies \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt:

$$n\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)}{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} = 0 \implies \sum_{i=1}^n (x_i-\mu) = 0 \implies \sum_{i=1}^n x_i = n\mu \implies \mu = \overline{x}_n.$$

Damit folgt

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_n)^2.$$

Die Determinante der Hessematrix von l bezüglich μ und σ^2 ausgewertet bei $\mu = \overline{x}_n$ ist $\forall \sigma^2 > 0$:

$$\begin{aligned} \det\left[\begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu) & -\frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2 + \frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^4} \end{pmatrix}\Bigg|_{\mu=\overline{x}_n}\right] &= \det\left[\begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}\right] \\ &= -\underbrace{\frac{n^2}{2\sigma^6}}_{>0} < 0. \end{aligned}$$

Es liegt also ein (lokales) Maximum bei $\theta = (\overline{x}_n, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}_n)^2)$ vor. Damit folgt die Behauptung. □

(b) Beh.: $\hat{\theta}_n(x) = \frac{\overline{x}_n}{m}$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Betrachte wieder den Logarithmus der Likelihoodfunktion:

$$\begin{aligned} L(x,p) &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{m-x_i} \\ &= p^{n\overline{x}_n}(1-p)^{nm-n\overline{x}_n} \\ l(x,p) &= n\overline{x}_n \log(p) + n(m-\overline{x}_n)\log(1-p) \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n\overline{x}_n}{p} - \frac{n(m-\overline{x}_n)}{1-p} \stackrel{!}{=} 0$$

Damit folgt direkt

$$p = \frac{\overline{x}_n}{m}$$

Dieses ist auch lokales Maximum da wegen $0 \le x_i \le m \ \forall i \in \mathbb{N}$ auch $0 \le \overline{x_n} \le m$ gilt und damit

$$\frac{\partial l^2}{\partial p^2}\Big|_{p=\frac{\overline{x}_n}{m}} = -\frac{n\overline{x}_n}{p^2} - \frac{n(m-\overline{x}_n)}{(1-p)^2}\Big|_{p=\frac{\overline{x}_n}{m}} = -n\frac{m^2}{\overline{x}_n} - \frac{n\overbrace{(m-\overline{x}_n)}^{\ge 0}}{\left(1-\frac{\overline{x}_n}{m}\right)^2} < 0.$$

Da $\frac{\overline{x}_n}{m}$ einzige Nullstelle von $\frac{\partial l}{\partial p}$, ist dieses auch globales Maximum. Damit folgt die Behauptung. □

Aufgabe 20. (a) Für die Zähldichte $\mathbb{p}_{X_i}$ gilt

$$\mathbb{p}_{X_i} = \begin{cases} \mathbb{p}_{\mathrm{Poi}_\lambda}(0) & |X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{p}_{\mathrm{Poi}_\lambda}(i) & |X_i = 1 \end{cases} = \begin{cases} e^{-\lambda} & |X_i = 0 \\ 1-e^{-\lambda} & |X_i = 1 \end{cases}$$

Für die Produktzähldichte erhalten wir daher

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{p}_{X_i} = (1-e^{-\lambda})^{\sum_{i=1}^{n} X_i}(e^{-\lambda})^{n-\sum_{i=1}^{n} X_i} = (1-e^{-\lambda})^{n\overline{X_n}}(e^{-\lambda})^{n-n\overline{X_n}}$$

Daraus ergibt sich die Likelihoodfunktion

$$L(X,\lambda) = (1-e^{-\lambda})^{n\overline{X_n}} e^{-n\lambda} e^{n\lambda\overline{X_n}} = (e^{\lambda}-1)^{n\overline{X_n}} \cdot e^{-n\lambda},$$

die log-Likelihoodfunktion

$$l(X,\lambda) = n\overline{X_n}\log(e^{\lambda}-1) - n\lambda,$$

sowie deren Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} l(X,\lambda) = n\overline{X_n}\frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1} - n \stackrel{!}{=} 0,$$

von der wir direkt die Nullstellen berechnen um Extremstellen in $L(X,\lambda)$ zu finden. Daraus folgern wir

$$\begin{aligned} \overline{X_n} e^{\hat{\lambda}_n} &= e^{\hat{\lambda}_n} - 1 \\ 1 - \overline{X_n} &= e^{-\hat{\lambda}_n} \\ \hat{\lambda}_n &= -\log(1-\overline{X_n}). \end{aligned}$$

(b) Der Schätzer $\hat{\lambda}_n$ existiert genau dann nicht, wenn $\overline{X_n} = 1 \Leftrightarrow X_i = 1 \forall 1 \le i \le n$. Es gilt

$$\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i(X_i = 1) = \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda}) = e^{-n\lambda} > 0.$$