Aufgabe	A33	A34	A35	$\sum$
Punkte				

Aufgabe 33. (a) Anwenden der Formel der VL ergibt sofort für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}}\,\mathrm{d}y \\ &= \mathbb{1}_{\{|x|\le 1\}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\mathbb{1}_{\{|x|\le 1\}} \end{aligned}$$

Ganz analog folgt für $y \in \mathbb{R}$:

$$f^Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,\mathbb{1}_{\{|y|\le 1\}}.$$

(b) Anwenden der Formel der VL ergibt zunächst mit Anwendung des Transformationssatzes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f^X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-1}^{0} 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} 2x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right] \\ &\overset{z=1-x^2}{=} \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{1} -\sqrt{z}\,\mathrm{d}z + \int_{1}^{0} -\sqrt{z}\,\mathrm{d}z\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Unter erneuter Formelanwendung folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f^X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\overset{x=\sin(\varphi)}{=} \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &\overset{\psi=2\varphi}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\psi)\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\psi \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\sin^2(\psi)+\cos^2(\psi))\,\mathrm{d}\psi \\ &= \frac{1}{8\pi}2\pi \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{1}{4}$$

Ganz analog

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = \frac{1}{4}$$

Betrachte nun zunächst

$$\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \overset{\text{part. Integrat.}}{=} \underbrace{\sin^2\varphi\Big|_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

Damit folgt

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0 \tag{1}$$

Es ist $\int_{\mathbb{R}^2} \left|\frac{xy}{\pi}\right| \mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}}\,\mathrm{d}(x,y) \le \frac{1}{\pi}\mathscr{L}^2(E) = 1 < \infty$, d.h. Fubini ist anwendbar. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xy f^{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{xy}{\pi}\mathbb{1}_{\{(x,y)\in E\}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{Trafosatz}}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, r^3\cos(\varphi)\sin(\varphi) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{(1)}{=} 0
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ folgt also

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = 0$$

Und damit

$$\rho(X,Y) = 0.$$

(c) Es gilt nach VL: $X \perp\!\!\!\perp Y \iff f^{X,Y}(x,y) = f^X(x)f^Y(y)$ $\mathscr{L}$-f.ü. Nun betrachte $A := (-1,1)^2\backslash E$. Dann ist

$$\mathscr{L}^2(A) = \mathscr{L}^2(A) - \mathscr{L}^2(E) = 2^2 - \pi = 4 - \pi > 0.$$

Also ist A keine $\mathscr{L}$-Nullmenge. Jedoch gilt $\forall (x,y) \in A$:

$$f^{X,Y}(x,y) = 0 \ne \frac{4}{\pi^2}\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{>0}\underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{>0}.$$

Also folgt X und Y nicht unabhängig.

Aufgabe 34. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^{Z_p}(x) &= \mathbb{P}^{Z_p}((-\infty,x]) \\
&= \mathbb{P}^{(-1)^{V_p}\cdot Y}((-\infty,x]\cap\{V_p=0\}) + \mathbb{P}^{(-1)^{V_p}\cdot Y}((-\infty,x]\cap\{V_p=1\}) \\
&= \mathbb{P}^{Y}((-\infty,x]\cap\{V_p=0\}) + \mathbb{P}^{-Y}((-\infty,x]\cap\{V_p=1\}) \\
&\overset{Y\perp\!\!\!\perp V_p}{=} \mathbb{P}(\{Y\le x\})\cdot\mathbb{P}(\{V_p=0\}) + \mathbb{P}(\{-Y\le x\})\cdot\mathbb{P}(\{V_p=1\}) \\
&\overset{\text{Symmetrie } N_{(0,1)}}{=} \mathbb{P}(\{Y\le x\})\cdot\mathbb{P}(\{V_p=0\}) + \mathbb{P}(\{Y\le x\})\cdot\mathbb{P}(\{V_p=1\}) \\
&= \mathbb{P}(\{Y\le x\})\cdot\mathbb{P}(\{V_p=0\}\cup\{V_p=1\}) \\
&= \mathbb{P}(\{Y\le x\}) \\
&= \mathbb{F}^Y(x)
\end{aligned}$$

Daher gilt $Z_p \sim Y \sim N_{(0,1)}$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y < -1, Z_p < -1\}) &= \mathbb{P}(\{Y < -1\} \cap \{V_p = 0\}) \overset{Y \perp\!\!\!\perp V_p}{=} \mathbb{P}(\{Y < -1\}) \cdot \mathbb{P}(\{V_p = 0\}) \\
&= (1-p) \cdot \mathbb{P}(\{Y < -1\})
\end{aligned}$$

und völlig analog

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y < -1, Z_p > 1\}) &= \mathbb{P}(\{Y < -1\} \cap \{V_p = 1\}) \overset{Y \perp\!\!\!\perp V_p}{=} \mathbb{P}(\{Y < -1\}) \cdot \mathbb{P}(\{V_p = 1\}) \\
&= p \cdot \mathbb{P}(\{Y < -1\})
\end{aligned}$$

Angenommen, $Y \perp\!\!\!\perp Z_p$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y < -1, Z_p < -1\}) &= \mathbb{P}(\{Y < -1\})\mathbb{P}(\{Z_p < -1\}) \\
(1-p) \cdot \mathbb{P}(\{Y < -1\}) &\overset{(a)}{=} \mathbb{P}(\{Y < -1\})^2 \\
(1-p) &= \mathbb{P}(\{Y < -1\})
\end{aligned}$$

und völlig analog

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{Y < -1, Z_p > 1\}) &= \mathbb{P}(\{Y < -1\})\mathbb{P}(\{Z_p > 1\}) \\
p \cdot \mathbb{P}(\{Y < -1\}) &\overset{\text{(a), Symmetrie } N_{(0,1)}}{=} \mathbb{P}(\{Y < -1\})^2 \\
p &= \mathbb{P}(\{Y < -1\})
\end{aligned}$$

Nun führen wir eine Fallunterscheidung durch. Für $p = \frac{1}{2}$ folgt $\mathbb{P}(\{Y < -1\}) < \mathbb{P}(\{Y < 0\}) \leq \frac{1}{2}$, Widerspruch zu $p = \mathbb{P}(\{Y < -1\})$. Für $p \neq \frac{1}{2}$ erhalten wir aus $p = \mathbb{P}(\{Y < -1\}) = (1-p)$ ebenfalls einen Widerspruch. Daher ist $Y \not\perp\!\!\!\perp Z_p$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(YZ_p) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} yz \mathrm{f}^{Y,Z_p}(y,z) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&\overset{Z_p = (-1)^{V_p} Y}{=} \int_{0,1} \int_{\mathbb{R}} y^2 (-1)^v \mathrm{f}^{Y,V_p}(y,v) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}v \\
&\overset{Y \perp\!\!\!\perp V_p}{=} (1-p) \cdot \int_{\mathbb{R}} y^2 \mathrm{f}^Y(y) \,\mathrm{d}y + p \cdot \int_{\mathbb{R}} -y^2 \mathrm{f}^Y(y) \,\mathrm{d}y \\
&= (1-2p) \int_{\mathbb{R}} y^2 \mathrm{f}^Y(y) \,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(y)\mathbb{E}(Z_p) &= \int_{\mathbb{R}} y \mathrm{f}^Y(y) \,\mathrm{d}y \int_{\mathbb{R}} z \mathrm{f}^{Z_p}(z) \,\mathrm{d}z \\
&\overset{Z_p = (-1)^{V_p} Y}{=} \int_{\mathbb{R}} y \mathrm{f}^Y(y) \,\mathrm{d}y \cdot \int_{0,1} \int_{\mathbb{R}} y (-1)^v \mathrm{f}^{Y,V_p}(y,v) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}v \\
&\overset{Y \perp\!\!\!\perp V_p}{=} (1-p) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} y \mathrm{f}^Y(y) \,\mathrm{d}y \right)^2 - p \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} y^2 \mathrm{f}^Y(y) \,\mathrm{d}y \right)^2 \\
&= (1-2p) \left(\int_{\mathbb{R}} y \mathrm{f}^Y(y) \,\mathrm{d}y \right)^2
\end{aligned}$$

Für $p = 0$ erhalten wir daher

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y, Z_p) = \mathbb{E}(YZ_p) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z_p) = 0 - 0 = 0.$$

Aufgabe 35. (a) Rechnen ergibt für $z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^{M_1}(z) &= \mathbb{P}(\{M_1 \le z\}) \\
&= \mathbb{P}\left(\left\{\min_{i\in\{1,\dots,n\}} X_i \le z\right\}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i > z\}\right) \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i > z\}) \\
&\overset{\text{idv}}{=} 1 - (1 - \mathbb{F}^X(z))^n \\
\mathbb{F}^{M_2}(z) &= \mathbb{P}(\{M_2 \le z\}) \\
&= \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^{n}\{X_i \le z\}\right) \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{X_i \le z\}) \\
&\overset{\text{idv}}{=} \mathbb{F}^X(z)^n.
\end{aligned}$$

(b) Für $X_1 \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ ist $\mathbb{F}^{X_1} = (1 - \exp(-\lambda z))\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}^{M_1}(z) &= 1 - (1 - \mathbb{F}_{\mathrm{Exp}_\lambda}(z))^n \\
&= 1 - \left[1 - (1 - \exp(-\lambda z))\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+(z)}\right]^n \\
&= 1 - [1 - \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z) + \exp(-\lambda z)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z)]^n \\
&= 1 - \begin{cases} \exp(-\lambda n z) & z \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & z \notin \mathbb{R}^+ \end{cases} \\
&= (1 - \exp(-\lambda n z))\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \\
&= \mathbb{F}_{\mathrm{Exp}_{n\lambda}}.
\end{aligned}$$

Da die Verteilungsfunktion das W-Maß eindeutig festlegt, folgt $M_1 \sim \mathrm{Exp}_{n\lambda}$.

(c) Für $X_1 \sim U_{[0,\theta]}$ ist die Dichte $f(x) = \frac{1}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}$ gegeben. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta(X_1) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^\theta x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\theta}{2} \\
\mathbb{E}_\theta(X_1^2) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{\theta}\mathbb{1}_{[0,\theta]}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^\theta x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\theta^2}{3} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X_1) &= \mathbb{E}_\theta(X_1^2) - \mathbb{E}_\theta(X_1)^2 \\
&= \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} \\
&= \frac{\theta^2}{12}.
\end{aligned}$$

Es gilt $f^{M_2} = (\mathbb{F}^{M_2})'$. Damit folgt für $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f^{M_2}(z) &= (\mathbb{F}^{M_2})'(z) \\ &= (\mathbb{F}^X(z)^n)' \\ &= n(\mathbb{F}^X(z)^{n-1}) f^X(z) \\ &= n \left(\frac{(z \wedge \theta) \vee \theta}{\theta} \right)^{n-1} \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(z) \\ &= \frac{n}{\theta^n} z^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(z) \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(M_2) &= \int_{\mathbb{R}} x \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{n+1} \theta. \end{aligned}$$

(d) Rechnen ergibt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(\overline{X}_n) &= \mathbb{E}_\theta \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) \\ &\overset{\text{lin.}}{=} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}_\theta(X_k) \\ &\overset{\text{idv}}{=} \mathbb{E}_\theta(X_1) \\ &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Bias}_\theta(\hat{\theta}_1) &= \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_1 - \theta) \\ &= 2\mathbb{E}_\theta(\overline{X}_n) - \theta \\ &= 2\frac{\theta}{2} - \theta \\ &= 0 \\ \mathrm{Bias}_\theta(\hat{\theta}_2) &= \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_2 - \theta) \\ &= \mathbb{E}_\theta(M_2) - \theta \\ &= \frac{n}{n+1}\theta - \theta \\ &= -\frac{\theta}{n+1} \end{aligned}$$

Nun rechne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(M_2^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^{n+1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{n}{n+2} \theta^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Es ist offensichtlich $\hat{\theta}_3$ nun erwartungstreu. Damit folgt für $n > 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\hat{\theta}_1) &= 4\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\overline{X}_n) \\
&\overset{\text{unabh.}}{=} \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X_k) \\
&\overset{\text{idv}}{=} \frac{4}{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X_1) \\
&= \frac{\theta^2}{3n} \\
&> \frac{\theta^2}{n(n+2)} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{n}{n+2}\theta^2 - \theta^2 \\
&\overset{(2)}{=} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\mathbb{E}_\theta(M_2^2) - \mathbb{E}_\theta\left(\frac{n+1}{n}M_2\right)^2 \\
&= \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_3^2) - \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_3)^2 \\
&= \mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\hat{\theta}_3)
\end{aligned}$$

Schlussendlich ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_1) &= \mathbb{E}_\theta(|\hat{\theta}_1 - \theta|^2) \\
&= 4\mathbb{E}_\theta(\overline{X}_n^2) - \theta^2 \\
&= 4\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(\overline{X}_n) + 4\mathbb{E}_\theta(\overline{X}_n)^2 - \theta^2 \\
&\overset{\text{iid}}{=} \frac{4}{n}\mathbb{V}\mathrm{ar}_\theta(X_1) \\
&= \frac{\theta^2}{3n} \\
\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_2) &= \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_2^2) - 2\theta\mathbb{E}_\theta(M_2) + \theta^2 \\
&= \frac{n}{n+2}\theta^2 - 2\frac{n}{n+1}\theta^2 + \theta^2 \\
&= \frac{2\theta^2}{(n+2)(n+1)} \\
\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}_3) &= \mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_3^2) - 2\theta\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_3) + \theta^2 \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\frac{n}{n+2}\theta^2 - \theta^2 \\
&= \frac{\theta^2}{n(n+2)}.
\end{aligned}$$