

Aufgabe	A29	A30	A31	Σ
Punkte				

Aufgabe 29. (i) Es ist $|X_n| \in \mathcal{A}^+$, damit folgt

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

Damit folgt mit 20.13. $\mathbb{P}(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| = \infty) = 0$ und damit

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| < \infty \right) = 1.$$

(ii) Es ist analog zu (i)

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \right| \right) \leq \mathbb{E} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

Also $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathcal{L}_1$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \in \mathcal{L}_1$.

(iii) Setze $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} X_k \in \overline{\mathcal{A}}$ und

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n X_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |X_k| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \in \mathcal{L}_1.$$

Insbesondere folgt $\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \in \mathcal{L}_1$.

Wegen Monotonie der Erwartung

$$\mathbb{E}(|S_n|) \leq \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |X_k| \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_k|) < \infty.$$

Also ist $S_n \in \mathcal{L}_1$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt mit dominierter Konvergenz im letzten Schritt:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_n) \\ &\stackrel{\text{Linearität}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n X_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_n) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 31. (a) Es ist

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = 0 \\ \stackrel{(X - \mathbb{E}(X))^2 \in \overline{\mathcal{A}}^+}{\iff} 1 &= \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 = 0) = \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) = 0) = \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)). \end{aligned}$$

(b) • Es gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\ &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(X - \mathbb{E}(X))] \\ &= \text{Cov}(Y, X). \end{aligned}$$

- Mit Linearität der Erwartung folgt direkt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Cov}(aX + bY, Z) &= \mathbb{E}[(aX + bY - \mathbb{E}(aX + bY))(Z - \mathbb{E}(Z))] \\
 &= \mathbb{E}[(a(X - \mathbb{E}(X)) + b(Y - \mathbb{E}(Y)))(Z - \mathbb{E}(Z))] \\
 &= a\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Z - \mathbb{E}(Z))] + b\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(Z - \mathbb{E}(Z))] \\
 &= a\mathbb{Cov}(X, Z) + b\mathbb{Cov}(Y, Z).
 \end{aligned}$$

- Mit Monotonie der Erwartung im letzten Schritt folgt

$$\mathbb{Cov}(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))] = \mathbb{E}[\underbrace{(X - \mathbb{E}(X))^2}_{\geq 0}] \geq 0.$$

- Es gilt $\mathbb{E}(a) = a$, also

$$\mathbb{Cov}(a, X) = \mathbb{E}[(a - \mathbb{E}(a))(X - \mathbb{E}(X))] = \mathbb{E}(0) = 0.$$

- (c) • Mit der Linearität der Kovarianz und der letzten Eigenschaft in (b) folgt sofort

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Var}(aX + b) &= \mathbb{Cov}(aX + b, aX + b) \\
 &\stackrel{\text{linear}}{=} a\mathbb{Cov}(X, aX + b) + \underbrace{\mathbb{Cov}(b, aX + b)}_{=0 \text{ (b.4)}} \\
 &\stackrel{\text{linear}}{=} a^2\mathbb{Cov}(X, X) + \underbrace{\mathbb{Cov}(X, b)}_{=0 \text{ (b.4)}} \\
 &= a^2\mathbb{Var}(X).
 \end{aligned}$$

- Mit Linearität und Symmetrie folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{Var}(X + Y) &= \mathbb{Cov}(X + Y, X + Y) \\
 &= \mathbb{Cov}(X, X) + \mathbb{Cov}(X, Y) + \mathbb{Cov}(Y, X) + \mathbb{Cov}(Y, Y) \\
 &= \mathbb{Var}(X) + \mathbb{Var}(Y) + 2\mathbb{Cov}(X, Y).
 \end{aligned}$$