

Aufgabe	A21	A22	A23	Σ
Punkte				

Aufgabe 21. (a) Beh.: $\mathbb{P}(\cdot | B)$ ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

Beweis. (i) Es ist für $A \in \mathcal{A}$: $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq 0$, da $\mathbb{P}$ W'-maß.

(ii) $\mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$.

(iii) Seien $A_i \in \mathcal{A}$ mit A_i paarweise disjunkt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i|B), \end{aligned}$$

wobei im 3. Schritt die σ -Additivität von $\mathbb{P}$ ausgenutzt wurde.

□

(b) Es ist beispielsweise mit $A = \emptyset$: $\mathbb{P}(\emptyset|\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap \Omega)}{\mathbb{P}(\Omega)} = \frac{0}{1} = 0 \neq 1$.

Aufgabe 23. (a) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathbb{P}(\Omega \cap A) = \mathbb{P}(A) = 1 \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(A)$. Außerdem gilt $\mathbb{P}(\emptyset \cap A) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\emptyset)\mathbb{P}(A)$.

(b) Seien A, B, C gemeinsam stochastisch unabhängig. Dann ist $\mathbb{P}((A \cap B) \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(C)$. Außerdem gilt $\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) \cap (B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C)(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A \cup B)$.

(c) Da der Würfel Laplace verteilt angenommen ist, folgt direkt $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Da die Summe der Augenzahlen genau dann gerade ist, wenn einer der Würfe eine gerade und einer der Würfe eine ungerade Zahl ergibt, folgt $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$. Dabei gilt $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$, da die Summe der Augenzahlen gerade ist, falls beide Würfe gerade Augenzahlen ergeben.

Die Ereignisse A, B, C sind paarweise unabhängig, denn

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(„1. Wurf gerade, 2. ungerade“) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(„1. und 2. Wurf gerade“) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(„1. Wurf ungerade, 2. gerade“) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Aber $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$