

Aufgabe	A25	A26	A27	A28	Σ
Punkte					

Aufgabe 26. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
 f^{X+Y}(z) &= [f^X * f^Y](z) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^X(z-x) f^Y(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}((z-x)-\mu_1)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2} dx
 \end{aligned}$$

Durch die Substitution $x \mapsto x + \mu_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}((z-x)-(\underbrace{\mu_1+\mu_2}_{=:\mu}))^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-z+\mu)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} dx
 \end{aligned}$$

Wir substituieren $z = z - \mu$.

$$\begin{aligned}
 f^{X+Y}(z+\mu) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-z)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)x^2 - 2\frac{1}{\sigma_1^2}xz + \frac{1}{\sigma_1^2}z^2\right]} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[x^2 - 2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}xz + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z^2\right]} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left(x - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z\right)^2 - \frac{\sigma_2^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}z^2 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z^2\right]} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left[\left(x - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z\right)^2\right]} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} + \sigma_1^2\right]z^2} dx
 \end{aligned}$$

Substitution $x := x + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}x^2} dx \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} + \frac{1}{\sigma_1^2}\right]z^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} + \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]z^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}z^2}
 \end{aligned}$$

Resubstitution $z := z + \mu = z + \mu_1 + \mu_2$

$$f^{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(z-(\mu_1+\mu_2))^2}$$

Daraus folgt $X+Y = N_{(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}$.

(b) Es ist bekannt, dass $n \cdot \overline{X_n} = \sum_{i=1}^n X_i \sim N_{(n\mu, n\sigma^2)}$ für $X_i \sim N_{(\mu, \sigma^2)}$. Wir betrachten nun

$h(X) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}X - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$. Nach dem Transformationssatz gilt dann für $Z_n = h(n \cdot \overline{X}_n)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^{Z_n}(y) &= \sqrt{n\sigma^2} \frac{1}{2\pi n\sigma^2} e^{-\frac{1}{2n\sigma^2}(\sqrt{n\sigma^2}(y + \sqrt{n}\sigma^{-1}\mu) - n\mu)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2n\sigma^2}(\sqrt{n\sigma^2}y + n\mu - n\mu)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2n\sigma^2} \cdot n\sigma^2 y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

Daher gilt $Z_n \sim N_{(0,1)}$.

Aufgabe 28. (a) Nach dem Dichtetransformationssatz gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^{AX+b}(y) &= \frac{1}{|\det(A)|} \mathbb{f}^X(A^{-1}(y-b)) \\ &= \det AA^t^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det \Sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle \Sigma^{-1}(A^{-1}(y-b) - \mu), A^{-1}(y-b) - \mu \rangle} \\ &= \det A \Sigma A^t^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle \Sigma^{-1} A^{-1}(y - (A\mu+b)), A^{-1}(y - (A\mu+b)) \rangle} \\ &= \det A \Sigma A^t^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle A^{-t} \Sigma^{-1} A^{-1}(y - (A\mu+b)), (y - (A\mu+b)) \rangle} \\ &= \det A \Sigma A^t^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle (A \Sigma A^t)^{-1}(y - (A\mu+b)), (y - (A\mu+b)) \rangle} \end{aligned}$$

Daher gilt $AX + b \sim N_{A\mu+b, A\Sigma A^t}$.

- (b) Wir definieren E_{ij} mit $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Dann erhalten wir durch $P_{ij} = \sum_{i=1}^n E_{ii} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ eine Permutationsmatrix. Für $Y = P_{1i}X$ gilt $Y \sim N_{(P_{1i}\mu, P_{1i}\Sigma P_{1i}^t)}$. Wegen $P_{1i}\Sigma P_{1i}^t = LDL^t$ für eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine Diagonalmatrix D , erhalten wir

$$L^{-1}P_{1i}X - L^{-1}P_{1i}\mu \sim N_{(L^{-1}P_{1i}\mu - L^{-1}P_{1i}\mu, L^{-1}LDL^tL^{-t})} = N_{(0,D)}$$

Da L und somit auch L^{-1} normierte untere Dreiecksmatrizen sind, gilt $(L^{-1} \cdot A)_{11} = A_{11}$ für beliebiges A . Daher erhalten wir für die Randverteilung

$$\begin{aligned} \mathbb{f}^{(L^{-1}P_{1i}X - L^{-1}P_{1i}\mu)_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^{L^{-1}P_{1i}X - L^{-1}P_{1i}\mu}(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 \\ \mathbb{f}^{(P_{1i}X)_1 - (P_{1i}\mu)_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot (\det D)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle D^{-1}x, x \rangle} dx_n \dots dx_2 \\ \mathbb{f}^{X_i - \mu_i}(x_1) &= (\det D)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{11}^{-1} x_1^2} \prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{ii}^{-1} x_i^2} \\ &= \frac{\sqrt{D_{22} \dots D_{nn}}}{\sqrt{\det D}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{11}^{-1} x_1^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{11}}} e^{-\frac{1}{2 D_{11}} x_1^2} \\ \implies \mathbb{f}^{X_i - \mu_i}(x_i) &\sim N_{(0, D_{11})} = N_{(0, (P_{1i}\Sigma P_{1i}^t)_{11})} = N_{(0, \Sigma_{ii})} \\ \mathbb{f}^{X_i}(x_i) &\sim N_{(\mu_i, \Sigma_{ii})} \end{aligned}$$

- (c) Durch die Permutation $P_{1i}P_{2j}$ können wir (analog zur Aufgabe (b)) o.B.d.A. $i = 1, j = 2$ annehmen. Wir wenden erneut die Cholesky-Zerlegung an und erhalten $\Sigma = LDL^t$, wobei wegen $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ auch $L_{21} = 0$ gelten muss. Daher ist auch $D_{11} = \Sigma_{11}$ und $D_{22} = \Sigma_{22}$. Wir berechnen nun die Randverteilung für (X_1, X_2) .

$$\mathbb{f}^{(L^{-1}X - L^{-1}\mu)_{(1,2)}}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^{L^{-1}X - L^{-1}\mu}(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_3$$

Nun nutzen wir $L_{21} = 0$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{f}^{(X_1, X_2) - (\mu_1, \mu_2)}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot (\det D)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} \langle D^{-1} x, x \rangle} dx_n \cdots dx_3 \\
 \mathbb{f}^{(X_1 - \mu_1, X_2 - \mu_2)}(x_1, x_2) &= (\det D)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{11}^{-1} x_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{22}^{-1} x_2^2} \cdot \prod_{i=3}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{ii}^{-1} x_i^2} \\
 &= \frac{\sqrt{D_{33} \cdots D_{nn}}}{\sqrt{\det D}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{11}^{-1} x_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} D_{22}^{-1} x_2^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{11}}} e^{-\frac{1}{2 D_{11}} x_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{22}}} e^{-\frac{1}{2 D_{22}} x_2^2} \\
 \mathbb{f}^{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \Sigma_{11}}} e^{-\frac{1}{2 \Sigma_{11}} (x_1 - \mu_1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \Sigma_{22}}} e^{-\frac{1}{2 \Sigma_{22}} (x_2 - \mu_2)^2} \\
 &= \mathbb{f}^{X_1}(x_1) \cdot \mathbb{f}^{X_2}(x_2)
 \end{aligned}$$

Also sind X_1 und X_2 unabhängig.