

Aufgabe	A5	A6	A7	Σ
Punkte				

Aufgabe 5. (a) Beh.: $\mathcal{D}$ ist ein Dynkinsystem.

Beweis. (i) $\Omega \in \mathcal{D}$, denn $|\Omega| = 2n$ gerade.

(ii) Sei $A \in \mathcal{D}$. Dann ist $|A| = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq 2n$. Da Ω endlich folgt

$$|A^c| = |\Omega| - |A| = 2n - 2k = 2(n - k).$$

Also $A^c \in \mathcal{D}$.

(iii) Sei $A_i \in \mathcal{D} \forall i \in \mathbb{N}$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Dann ex. für $i \in \mathbb{N}$ ein $k_i \in \mathbb{N}_0$ mit $|A_i| = 2k_i$.
Damit folgt, da die A_i disjunkt sind

$$\left| \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right| = \sum_{i \in \mathbb{N}} |A_i| = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2k_i = 2 \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}} k_i}_{\in \mathbb{N}_0}.$$

Also $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{D}$.

□

(b) Beh.: Für $n \geq 2$ ist $\mathcal{D}$ keine σ -Algebra.

Beweis. Sei $n \geq 2$. Dann ist $|\Omega| \geq 4$. Seien dann $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ paarweise verschieden. Dann ist

$$\underbrace{\{\omega_1, \omega_2\}}_{\in \mathcal{D}} \cap \underbrace{\{\omega_2, \omega_3\}}_{\in \mathcal{D}} = \{\omega_2\} \notin \mathcal{D}.$$

Also $\mathcal{D}$ nicht $\cap$ -stabil, also keine σ -Algebra.

□

Aufgabe 7. (a) Beh.: $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$

Beweis. (i) Z.z.: $\binom{\alpha+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-\alpha}{k} \forall \alpha \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$.

Seien $\alpha \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \binom{\alpha+k-1}{k} &= \frac{(\alpha+k-1)!}{k!(\alpha-1)!} \\ &= \frac{(\alpha+k-1) \cdots (\alpha+1)\alpha}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(-\alpha - (k-1)) \cdots (-\alpha-1)(-\alpha)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{(-\alpha)(-\alpha-1) \cdots (-\alpha-(k-1))}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{-\alpha}{k}. \end{aligned}$$

(ii) Z.z.: $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \forall \alpha \in \mathbb{Z}, x \in (-1, 1)$.

Seien $\alpha \in \mathbb{Z}, x \in (-1, 1)$. Dann betrachte

$$\begin{aligned} f: (-1, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (1+x)^\alpha. \end{aligned}$$

Dann ist $f^{(k)}(0) = \prod_{j=0}^{k-1} (\alpha-j)$. Damit folgt als Taylorpolynom für f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} T_n(x, 0) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha-j)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k. \end{aligned}$$

Mit $a_k := \binom{\alpha}{k} x^k$ folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{\frac{\prod_{j=0}^k (\alpha-j)}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha-j)}{k!} x^k} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| |x| \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} |x| < 1. \end{aligned}$$

T_n ist also konvergent $\forall x \in (-1, 1)$:

$$T_n(x, 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = (1+x)^\alpha.$$

(iii) Damit folgt nun für $r \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0} \mathbb{P}(\omega) &= \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0} \binom{\omega+r-1}{\omega} p^r (1-p)^\omega \\ &= p^r \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0} \binom{\omega+r-1}{\omega} (1-p)^\omega \\ &\stackrel{(i)}{=} p^r \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0} (-1)^\omega \binom{-r}{\omega} (1-p)^\omega \\ &= p^r \sum_{\omega \in \mathbb{N}_0} \binom{-r}{\omega} (p-1)^\omega \\ &\stackrel{(ii)}{=} p^r (1+p-1)^{-r} \\ &= p^r p^{-r} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieser Zähldichte kann modelliert werden, dass eine Münze bei $\omega + r$ Würfeln genau im $\omega + r$ -ten Wurf r mal Kopf gezeigt hat.

(b) Es soll nach dem 30. Zug genau zum 6. Mal gewonnen werden, d.h. $r = 6$, damit

$$\omega + r = 30 \implies \omega = 24.$$

Mit $p = 0.2$ und der (a) folgt

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \binom{24+6-1}{24} 0.2^6 (1-0.2)^{24} \approx 0.625.$$