

Aufgabe	A9	A10	A11	A12	Σ
Punkte					

Aufgabe 9. (a) Beh.: $C_{\alpha, x_m} = \alpha x_m^\alpha$.

Beweis. Es muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} C_{\alpha, x_m} x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x \geq x_m\}} dx &= \int_{x_m}^{\infty} C_{\alpha, x_m} x^{-(\alpha+1)} dx \\
 &= C_{\alpha, x_m} \int_{x_m}^{\infty} x^{-(\alpha+1)} dx \\
 &\stackrel{\alpha+1 > 1}{=} -C_{\alpha, x_m} \frac{1}{\alpha} x^{-\alpha} \Big|_{x_m}^{\infty} \\
 &= -\frac{C_{\alpha, x_m}}{\alpha} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{-\alpha} - x_m^{-\alpha}] \\
 &\stackrel{\alpha > 0}{=} \frac{C_{\alpha, x_m}}{\alpha} x_m^{-\alpha} \\
 &\stackrel{!}{=} 1
 \end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$C_{\alpha, x_m} = \alpha x_m^\alpha.$$

□

(b) Beh.: $F(x) = \left(1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\{x \geq x_m > 0\}}$

Beweis. Falls $x < x_m$ ist $f(y) = 0 \forall y \leq x$, also $F(x) = 0$. Sei also $x \geq x_m$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{x_m}^x \alpha x_m^\alpha y^{-(\alpha+1)} dy \\
 &= -x_m^\alpha y^{-\alpha} \Big|_{x_m}^x \\
 &= -x_m^\alpha [x^{-\alpha} - x_m^{-\alpha}] \\
 &= -x_m^\alpha x^{-\alpha} + x_m^\alpha x_m^{-\alpha} \\
 &= 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$F(x) = \left(1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\{x \geq x_m > 0\}}.$$

□

(c) Beh.: $\mathbb{P}([1, 2]) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}((2, \infty))$.

Beweis. Mit $\alpha = x_m = 1$ folgt $F(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathbb{1}_{\{x \leq 1\}}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}([1, 2]) &= F(2) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} \\
 \mathbb{P}((2, \infty)) &= 1 - \mathbb{P}((-\infty, 2]) = 1 - F(2) = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 10. (a) Ein Neyman-Pearson-Test für dieses Testproblem ist gegeben durch die Funktion $\mathbb{1}_{A_k}$ mit

$$\begin{aligned} A_k &= \{x: \mathbb{P}_{\text{Poi}_{\lambda_1}}(x) \geq \mathbb{P}_{\text{Poi}_{\lambda_0}}(x)\} \\ &= \{x: e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{x!} \geq k e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^x}{x!}\} \\ &= \{x: e^{\lambda_0 - \lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{\lambda_0^x} \geq k\} \end{aligned}$$

Damit einer dieser Tests ein bester Test zum Niveau $\alpha \in (0, 1)$ ist, muss $\mathbb{P}_{\lambda_0}(A_k) = \alpha$ gelten.

- (b) Da $e^{\lambda_0 - \lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{\lambda_0^x}$ für $\lambda_1 > \lambda_0$ und $x > 0$ stets streng monoton wachsend ist und $\mathbb{P}_{\lambda_0}(A_k) = \alpha$ völlig unabhängig von λ_1 ist, muss jeder beste Test zum Niveau α auch ein gleichmäßig bester Test für H_0 gegen H'_1 sein.
- (c) Wählen wir $A = [9157, \infty)$ als Ablehnungsbereich, so erhalten wir

$$\mathbb{P}_0(A) = \sum_{k=9157}^{\infty} \frac{\lambda_0^k}{k!} e^{-\lambda_0} \leq 0.05.$$

Für ein beliebiges λ_1 existiert jetzt ein k derart, dass wir diesen Ablehnungsbereich als Neyman-Pearson-Test schreiben können.

$$\{x: e^{\lambda_0 - \lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{\lambda_0^x} \geq k\} = \{9157, \dots\}.$$

Aufgabe 11. Zunächst ist zu bemerken, dass mit $\mathcal{E} := \{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ nach VL gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \overline{\mathcal{B}}$. Damit ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

- (a) (1) Sei $m \in \mathbb{N}$. Beh.: Folgende Abbildungen sind $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar:

- (i) $\sup_{n \geq m} X_n: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
(ii) $\inf_{n \geq m} X_n: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Beweis. (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ bel. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\sup_{n \geq m} X^n(x) > a \iff \exists n \geq m: X^n(x) > a.$$

Damit folgt da X^n $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar und $\mathcal{A}$ σ -Algebra:

$$\begin{aligned} (\sup_{n \geq m} X_n)^{-1}((a, \infty]) &= \{x \in \Omega \mid \sup_{n \geq m} X^n(x) > a\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists n \geq m: X^n > a\} \\ &= \bigcup_{n \geq m} \{x \in \Omega \mid X^n(x) > a\} \\ &= \bigcup_{n \geq m} \underbrace{(X^n)^{-1}((a, \infty])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Also $\sup_{n \geq m} X^n$ $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar.

- (ii) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\inf_{n \geq m} X^n(x) < a \iff \exists n \geq m: X^n(x) < a.$$

Damit folgt da X^n $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar und $\mathcal{A}$ σ -Algebra:

$$\begin{aligned} (\inf_{n \geq m} X_n)^{-1}([-\infty, a)) &= \{x \in \Omega \mid \inf_{n \geq m} X^n(x) < a\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists n \geq m: X^n < a\} \\ &= \bigcup_{n \geq m} \{x \in \Omega \mid X^n(x) < a\} \\ &= \bigcup_{n \geq m} \underbrace{(X^n)^{-1}([-\infty, a))}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Da auch $\sigma(\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}) = \overline{\mathcal{B}}$ folgt also $\inf_{n \geq m} X^n$ $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar.

□

(2) Beh.: $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$ sind $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar.

Beweis. Definiere $f_m := \sup_{n \geq m} X_n$. Dann ist f_m messbar nach (1)(i) und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \inf_{m \geq 1} \sup_{n \geq m} X_n = \inf_{m \geq 1} f_m$$

$(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar nach (1)(ii).

Definiere nun $h_m := \inf_{n \geq m} X_n$. h_m messbar nach (1) (ii) $\forall m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \sup_{m \geq 1} \inf_{n \geq m} X_n = \sup_{m \geq 1} h_m$$

$(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar nach (1)(i). □

(3) Beh.: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar.

Beweis. Sei $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$. Dann ist $X = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$, also X $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar nach (2). □

(b) Beh.: Y $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -messbar.

Beweis. Beachte, dass es für $\mathcal{B}$ genügt, die offenen Intervalle (a, ∞) für $a \in \mathbb{R}$ zu betrachten.

Sei $a \in \mathbb{R}$ bel.

- Falls $a \leq 0$, dann ist $0, 1 \in (a, \infty)$, also $Y^{-1}((a, \infty)) = \Omega \in \mathcal{A}$.
- Falls $0 < a < 1$: Dann ist $1 \in (a, \infty)$ und $0 \notin (a, \infty)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} Y^{-1}((a, \infty)) &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) > X_2(\omega)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) - X_2(\omega) > 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid (X_1 - X_2)(\omega) \in (0, \infty)\} \\ &= (X_1 - X_2)^{-1}((0, \infty)). \end{aligned}$$

Da X_1, X_2 $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar, ist nach VL auch $X_1 - X_2$ $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar. Da weiter $(0, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}$, folgt also $(X_1 - X_2)^{-1}((0, \infty]) \in \mathcal{A}$.

- Falls $a \geq 1$, dann ist $0, 1 \notin (a, \infty)$, also $Y^{-1}((a, \infty)) = \emptyset \in \mathcal{A}$. □

Aufgabe 12. (a) Sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Sei dann $A := f^{-1}([a, n])$ und $\alpha \in U_\epsilon(\inf A) \cap A$ sowie $\beta \in U_\epsilon(\sup A) \cap A$. Für beliebiges $\alpha \leq x \leq \beta$ folgt aufgrund der Monotonie $a \leq f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \leq b$, also $f(x) \in [a, b]$ und damit $x \in A$. Also muss A ein Intervall sein und damit wieder in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ liegen. Da die Menge aller Intervalle $[a, b]$ bereits ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist, folgt daraus bereits die Messbarkeit.

(b) Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Dann ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n(x) := g(s_n, x)$ eine Funktionenfolge, die wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g(s_n, x) - g(s, x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} |g(s_n, x) - g(s, x)| = 0$$

gleichmäßig konvergiert. Insbesondere gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(s_n, x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n, x) dx = \int_0^1 g(s, x) dx = h(s).$$

(c) Wähle ein A , sodass $[0, 1] \subset A \in 2^{\mathbb{R}}$, aber $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und

$$\kappa: x \mapsto \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & x \in A \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\forall c \in [0, 1]: \kappa^{-1}(c) = \{c, c+1, c-1, \dots\}$, insbesondere ist $\kappa^{-1}(c)$ abzählbar und damit Element von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Für $x \in A \cap [0, 1]^c$ ist $\kappa(c)$ einfach die leere Menge. Für $x \in A^c \cap [0, 1]^c$ ist $\kappa(c) = \{c\}$. Damit ist die Bedingung an κ erfüllt. Dennoch ist $\kappa^{-1}([0, 1]) = A$ und $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$.