Aufgabe	A25	A26	A27	A28	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 25. (a) Beh.: $\mathbb{p}(k) = e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$.

Beweis. Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ W-Raum mit Ereignissen

$$A_n : \text{„Anzahl 7-Meter pro Spiel"}$$
$$B_n : \text{„Anzahl Treffer per 7-Meter pro Spiel"}$$

mit $\mathbb{P}(A_n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ und $\mathbb{P}(B_k \mid A_n) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, wobei $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.
Dann ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Partition von Ω. Damit folgt mit Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
\mathbb{p}(k) &= \mathbb{P}(A_n) \\
&= \mathbb{P}(A_n \cap \Omega) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B_k \mid A_n) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}p^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^k\lambda^{n-k}}{n!}\frac{n!}{k!(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}(1-p)^n \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

□

(b) Seien X bzw. Y die Lebensdauer in Tagen von Lampe 1 bzw. Lampe 2 mit $X \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_1}$ und $Y \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_2}$. Nach Vorraussetzung ist $X \perp\!\!\!\perp Y$, also $X + Y \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_1} * \mathrm{Poi}_{\lambda_2}$. Nach VL hat $\mathrm{Poi}_{\lambda_1} * \mathrm{Poi}_{\lambda_2}$ die Zähldichte

$$\begin{aligned}
(\mathbb{p}_1 * \mathbb{p}_2)(n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{p}_1(n-k)\mathbb{p}_2(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^k}{k!}e^{-\lambda_2} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{(n-k)!k!}}_{=\binom{n}{k}}\lambda_1^{n-k}\lambda_2^k \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Also folgt $X + Y \sim \mathrm{Poi}_{\lambda_1+\lambda_2}$.

Aufgabe 26. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{f}^{X+Y}(z) &= [\mathbb{f}^X * \mathbb{f}^Y](z) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}^X(z-x)\mathbb{f}^Y(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}((z-x)-\mu_1)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_2^2}(x-\mu_2)^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Durch die Substitution $x \mapsto x + \mu_2$ erhalten wir

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}((z-x)-(\underbrace{\mu_1+\mu_2}_{=:\mu}))^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-z+\mu)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} \,\mathrm{d}x$$

Wir substituieren $z = z - \mu$.

$$\mathbb{f}^{X+Y}(z+\mu) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-z)^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}x^2} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}\right)x^2-2\frac{1}{\sigma_1^2}xz+\frac{1}{\sigma_1^2}z^2\right]} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2}\left[x^2-2\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}xz+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z^2\right]} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2}\left[\left(x-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z\right)^2-\frac{\sigma_2^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}z^2+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z^2\right]} \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2}\left[\left(x-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z\right)^2\right]} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}+\sigma_1^2\right]z^2} \,\mathrm{d}x$$

Subsitution $x := x + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}z$ und erhalten

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}x^2} \,\mathrm{d}x \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}+\frac{1}{\sigma_1^2}\right]z^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\cdot\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \,\mathrm{d}x \cdot e^{-\frac{1}{2}\left[-\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}+\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]z^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot e^{-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}z^2}$$

Resubstitution $z := z + \mu = z + \mu_1 + \mu_2$

$$\mathbb{f}^{X+Y}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\cdot e^{-\frac{1}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(z-(\mu_1+\mu_2))^2}$$

Daraus folgt $X + Y = N_{(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)}$.

(b) Es ist bekannt, dass $n \cdot \overline{X_n} = \sum_{i=1}^n X_i \sim N_{(n\mu,n\sigma^2)}$ für $X_i \sim N_{(\mu,\sigma^2)}$. Wir betrachten nun $h(X) = \frac{1}{\sqrt{n\sigma^2}}X - \frac{\sqrt{n}\mu}{\sigma}$. Nach dem Transformationssatz gilt dann für $Z_n = h(n \cdot \overline{X_n})$:

$$\mathbb{f}^{Z_n}(y) = \sqrt{n\sigma^2}\frac{1}{2\pi n\sigma^2}e^{-\frac{1}{2n\sigma^2}(\sqrt{n\sigma^2}(y+\sqrt{n}\sigma^{-1}\mu)-n\mu)^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2n\sigma^2}(\sqrt{n\sigma^2}y+n\mu-n\mu)^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2n\sigma^2}\cdot n\sigma^2y^2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Daher gilt $Z_n \sim N_{(0,1)}$.

Aufgabe 27. (i)-(iii) bezeichne im Folgenden die Eigenschaften von $\mathbb{E}$ aus Satz 20.01.

(a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n \in \overline{\mathscr{A}}^+$. Dann setze $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Dann ist $S_n \in \overline{\mathscr{A}}^+$ und $S_n \uparrow \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) &\overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} X_n\right) \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n).\end{aligned}$$

(b)

- „$\implies$": Sei $\perp\!\!\!\perp_{i\in I} \mathcal{A}_i$ und $(X_i)_{i\in I}$ mit $X_i \in \overline{\mathcal{A}_i}^+$ für $i \in I$. Sei weiter $\emptyset \neq J \subseteq I$ endlich.

(1) Seien X_i Bernoulli ZV mit $X_i = \mathbb{1}_{A_i}$ und $A_i \in \mathcal{A}_i$ für $i \in I$. Da $\perp\!\!\!\perp_{i\in I} \mathcal{A}_i \implies \perp\!\!\!\perp_{i\in I} A_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{j\in J} X_j\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{j\in J} A_j\right) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\bigcap_{j\in J} A_j}) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} \mathbb{P}(\bigcap_{j\in J} A_j) \\ &\overset{\perp\!\!\!\perp_{i\in I} A_i}{=} \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j) \\ &\overset{\text{(iii)}}{=} \prod_{j\in J} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_j}) \\ &= \prod_{j\in J} \mathbb{E}(X_j).\end{aligned}$$

(2) Seien nun X_i einfache positive numerische ZV. Dann ist $\prod_{j\in J} X_j$ eine Summe von Produkten aus skalierten Bernoulli-ZV. Mit (a), (ii) und Schritt (1) folgt die Behauptung für $(X_i)_{i\in I}$.

(3) Seien nun $X_i \in \overline{\mathcal{A}_i}^+$ für $i \in I$. Für $i \in I$ ex. dann eine Folge $(X_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_{in} \uparrow X_i$ und X_{in} einfach positiv numerische ZV. Da J endlich folgt dann

$$\prod_{i\in J} X_i = \prod_{i\in J} \lim_{n\to\infty} X_{in} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i\in J} X_{in}.$$

Also folgt $\prod_{j\in J} X_{in} \uparrow \prod_{j\in J} X_i$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\prod_{j\in J} X_j\right) &= \mathbb{E}\left(\prod_{j\in J} \lim_{n\to\infty} X_{jn}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\lim_{n\to\infty} \prod_{j\in J} X_{jn}\right) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{j\in J} X_{jn}\right) \\ &\overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \prod_{j\in J} \mathbb{E}(X_{jn}) \\ &= \prod_{j\in J} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_{jn}) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \prod_{j\in J} \mathbb{E}(X_j).\end{aligned}$$

- „ $\Longleftarrow$ ": Sei $(A_i)_{i\in I}$ mit $A_i \in \mathcal{A}_i$ für $i \in I$. Z.z.: $\perp\!\!\!\perp_{i\in I} A_i$. Dazu sei $\emptyset \neq J \subseteq I$ endlich. Betrachte $X_i := \mathbb{1}_{A_i}$. Dann ist nach Vorraussetzung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in J} A_i\right) &\overset{\text{(iii)}}{=} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\bigcap_{i\in J} A_i}\right)\\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{i\in J}\mathbb{1}_{A_i}\right)\\ &\overset{\text{Vorr.}}{=} \prod_{i\in J}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i})\\ &\overset{\text{(iii)}}{=} \prod_{i\in J}\mathbb{P}(A_i).\end{aligned}$$

Aufgabe 28. (a) Nach dem Dichtetransformationssatz gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}^{AX+b}(y) &= \frac{1}{|\det(A)|}\mathfrak{f}^X(A^{-1}(y-b))\\ &= \det AA^{t^{-\frac{1}{2}}} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \det \Sigma^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle\Sigma^{-1}(A^{-1}(y-b)-\mu),A^{-1}(y-b)-\mu\rangle}\\ &= \det A\Sigma A^{t^{-\frac{1}{2}}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle\Sigma^{-1}A^{-1}(y-(A\mu+b)),A^{-1}(y-(A\mu+b))\rangle}\\ &= \det A\Sigma A^{t^{-\frac{1}{2}}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle A^{-t}\Sigma^{-1}A^{-1}(y-(A\mu+b)),(y-(A\mu+b))\rangle}\\ &= \det A\Sigma A^{t^{-\frac{1}{2}}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle (A\Sigma A^t)^{-1}(y-(A\mu+b)),(y-(A\mu+b))\rangle}\end{aligned}$$

Daher gilt $AX + b \sim N_{A\mu+b,A\Sigma A^t}$.

(b) Wir definieren E_{ij} mit $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Dann erhalten wir durch $P_{ij} = \sum_{i=1}^n E_{ii} - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ eine Permutationsmatrix. Für $Y = P_{1i}X$ gilt $Y \sim N_{(P_{1i}\mu, P_{1i}\Sigma P_{i1})}$. Wegen $P_{1i}\Sigma P_{i1} = LDL^t$ für eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine Diagonalmatrix D, erhalten wir

$$L^{-1}P_{1i}X - L^{-1}P_{1i}\mu \sim N_{(L^{-1}P_{1i}\mu - L^{-1}P_{1i}\mu, L^{-1}LDL^tL^{-t})} = N_{(0,D)}$$

Da L und somit auch L^{-1} normierte untere Dreiecksmatrizen sind, gilt $(L^{-1}\cdot A)_{11} = A_{11}$ für beliebiges A. Daher erhalten wir für die Randverteilung

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}^{(L^{-1}P_{1i}X-L^{-1}P_{1i}\mu)_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}^{L^{-1}P_{1i}X-L^{-1}P_{1i}\mu}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_2\\ \mathfrak{f}^{(P_{1i}X)_1-(P_{1i}\mu)_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot(\det D)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\langle D^{-1}x,x\rangle}\,\mathrm{d}x_n\,\cdots\,\mathrm{d}x_2\\ \mathfrak{f}^{X_i-\mu_i}(x_1) &= (\det D)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}D_{11}^{-1}x_1^2}\prod_{i=2}^n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}D_{ii}^{-1}x_i^2}\\ &= \frac{\sqrt{D_{22}\cdot\cdots\cdot D_{nn}}}{\sqrt{\det D}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}D_{11}^{-1}x_1^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{11}}}e^{-\frac{1}{2D_{11}}x_1^2}\\ \Longrightarrow \mathfrak{f}^{X_i-\mu_i}(x_i) &\sim N_{(0,D_{11})} = N_{(0,(P_{1i}\Sigma P_{i1})_{11})} = N_{(0,\Sigma_{ii})}\\ \mathfrak{f}^{X_i}(x_i) &\sim N_{(\mu_i,\Sigma_{ii})}\end{aligned}$$

(c) Durch die Permutation $P_{1i}P_{2j}$ können wir (analog zur Aufgabe (b)) o.B.d.A. $i = 1$, $j = 2$ annehmen. Wir wenden erneut die Cholesky-Zerlegung an und erhalten $\Sigma = LDL^t$, wobei wegen $\Sigma_{12} = \Sigma_{21}$ auch $L_{21} = 0$ gelten muss. Daher ist auch $D_{11} = \Sigma_{11}$ und $D_{22} = \Sigma_{22}$. Wir berechnen nun die Randverteilung für (X_1, X_2).

$$\mathfrak{f}^{(L^{-1}X-L^{-1}\mu)_{(1,2)}}(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{f}^{L^{-1}X-L^{-1}\mu}(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_3$$

Nun nutzen wir $L_{21} = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{f}^{(X_1,X_2)-(\mu_1,\mu_2)}(x_1,x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \cdot (\det D)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\langle D^{-1}x,x\rangle}\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_3 \\
\mathbb{f}^{(X_1-\mu_1,X_2-\mu_2)}(x_1,x_2) &= (\det D)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}D_{11}^{-1}x_1^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}D_{22}^{-1}x_2^2} \cdot \prod_{i=3}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}D_{ii}^{-1}x_i^2} \\
&= \frac{\sqrt{D_{33}\cdot \cdots \cdot D_{nn}}}{\sqrt{\det D}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}D_{11}^{-1}x_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}D_{22}^{-1}x_2^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{11}}} e^{-\frac{1}{2D_{11}}x_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{22}}} e^{-\frac{1}{2D_{22}}x_2^2} \\
\mathbb{f}^{(X_1,X_2)}(x_1,x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_{11}}} e^{-\frac{1}{2\Sigma_{11}}(x_1-\mu_1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma_{22}}} e^{-\frac{1}{2\Sigma_{22}}(x_2-\mu_2)^2} \\
&= \mathbb{f}^{X_1}(x_1) \cdot \mathbb{f}^{X_2}(x_2)
\end{aligned}
$$

Also sind X_1 und X_2 unabhängig.