

Aufgabe	A17	A18	A19	Σ
Punkte				

Aufgabe 17. Beh.: $\varphi = \mathbb{1}_{A_k}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ ist bester Test zum Niveau $\mathbb{P}_0(A_k) \in [0, 1]$.

Beweis. Sei $\tilde{\varphi} = \mathbb{1}_{\tilde{A}}$ ein Test zum Niveau $\mathbb{P}_0(A_k)$, d.h. $\mathbb{P}_0(\tilde{\varphi} = 1) = \mathbb{P}_0(\tilde{A}) \leq \mathbb{P}_0(A_k) = \mathbb{P}_0(\varphi = 1)$ (**).

Z.z.: $\mathbb{P}_1(\tilde{\varphi} = 0) = \mathbb{P}_1(\tilde{A}^c) \geq \mathbb{P}_1(A_k^c) = \mathbb{P}_1(\varphi = 0)$.

Es ist $x \in A_k \iff f_1(x) - kf_0(x) \geq 0$, also $x \in A_k^c \iff f_1(x) - kf_0(x) < 0$ (*). Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_1(A_k) - k\mathbb{P}_0(A_k) &= \int_{A_k} [f_1(x) - kf_0(x)] \, dx \\
 &\geq \int_{A_k \cap \tilde{A}} [f_1(x) - kf_0(x)] \, dx \\
 &\geq \int_{A_k \cap \tilde{A}} [f_1(x) - kf_0(x)] \, dx + \int_{A_k^c \cap \tilde{A}} \underbrace{[f_1(x) - kf_0(x)]}_{< 0 \text{ (*)}} \, dx \\
 &= \int_{\tilde{A}} [f_1(x) - kf_0(x)] \, dx \\
 &= \mathbb{P}_1(\tilde{A}) - k\mathbb{P}_0(\tilde{A}).
 \end{aligned}$$

Also folgt

$$\mathbb{P}_1(A_k) - \mathbb{P}_1(\tilde{A}) \geq k(\mathbb{P}_0(A_k) - \mathbb{P}_0(\tilde{A}))^{(**)} \geq 0.$$

Es ist also $\mathbb{P}_1(A_k) \geq \mathbb{P}_1(\tilde{A})$, insgesamt

$$\mathbb{P}_1(A_k^c) = 1 - \mathbb{P}_1(A_k) \leq 1 - \mathbb{P}_1(\tilde{A}) = \mathbb{P}_1(\tilde{A}^c).$$

Also Fehler 2. Art minimiert und damit φ bester Test zum Niveau $\mathbb{P}_0(A_k)$. □

Aufgabe 19. (a) Beh.: $\hat{\theta}_n(x) = (\bar{x}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2)$.

Beweis. Betrachte für $\sigma^2 > 0$:

$$\begin{aligned}
 L(x, \mu, \sigma^2) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right) \\
 l(x, \mu, \sigma^2) &= \log L \\
 &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2)
 \end{aligned}$$

Es genügt die Maxima von $l = \log L$ zu betrachten, da der Logarithmus streng monoton wachsend ist. Betrachte den Gradienten bezüglich μ und σ^2 :

$$\nabla l(x, \mu, \sigma^2) = \left(\frac{\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n 2(x_i - \mu)}{\frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 - \frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2}} \right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit folgt

$$\frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \frac{n}{\sigma^2} \implies \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt:

$$n \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = 0 \implies \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \implies \sum_{i=1}^n x_i = n\mu \implies \mu = \bar{x}_n.$$

Damit folgt

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2.$$

Die Determinante der Hessematrix von l bezüglich μ und σ^2 ausgewertet bei $\mu = \bar{x}_n$ ist $\forall \sigma^2 > 0$:

$$\det \left[\begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) \\ -\frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) & -\frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 + \frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^4} \end{pmatrix} \Big|_{\mu=\bar{x}_n} \right] = \det \left[\begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4} \end{pmatrix} \right] \\ = - \underbrace{\frac{n^2}{2\sigma^6}}_{>0} < 0.$$

Es liegt also ein (lokales) Maximum bei $\theta = (\bar{x}_n, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2)$ vor. Damit folgt die Behauptung. $\square$

(b) Beh.: $\hat{\theta}_n(x) = \frac{\bar{x}_n}{m}$.

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ fest. Betrachte wieder den Logarithmus der Likelihoodfunktion:

$$\begin{aligned} L(x, p) &= \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{m-x_i} \\ &= p^{n\bar{x}_n} (1-p)^{nm-n\bar{x}_n} \\ l(x, p) &= n\bar{x}_n \log(p) + n(m - \bar{x}_n) \log(1-p) \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{n\bar{x}_n}{p} - \frac{n(m - \bar{x}_n)}{1-p} \stackrel{!}{=} 0$$

Damit folgt direkt

$$p = \frac{\bar{x}_n}{m}$$

Dieses ist auch lokales Maximum da wegen $0 \leq x_i \leq m \ \forall i \in \mathbb{N}$ auch $0 \leq \bar{x}_n \leq m$ gilt und damit

$$\frac{\partial^2 l}{\partial p^2} \Big|_{p=\frac{\bar{x}_n}{m}} = -\frac{n\bar{x}_n}{p^2} - \frac{n(m - \bar{x}_n)}{(1-p)^2} \Big|_{p=\frac{\bar{x}_n}{m}} = -n \frac{m^2}{\bar{x}_n} - \frac{n \overbrace{(m - \bar{x}_n)}^{\geq 0}}{\left(1 - \frac{\bar{x}_n}{m}\right)^2} < 0.$$

Da $\frac{\bar{x}_n}{m}$ einzige Nullstelle von $\frac{\partial l}{\partial p}$, ist dieses auch globales Maximum. Damit folgt die Behauptung. $\square$