

Aufgabe	A40	A41	A42	A43	A44	Σ
Punkte						

Aufgabe 40.**Aufgabe 41.****Aufgabe 42.** (a) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann rechne

$$\mathbb{E}(\cos(tX)) = \int_a^b \cos(tx) \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{1}{t} \sin(tx) \Big|_a^b = \frac{1}{t(b-a)} (\sin(tb) - \sin(ta))$$

$$\mathbb{E}(\sin(tX)) = \int_a^b \sin(tx) \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{t(b-a)} (\cos(ta) - \cos(tb))$$

Insgesamt ergibt sich

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{t(b-a)} [\sin(tb) - \sin(ta) + i \cos(ta) - i \cos(tb)] = \frac{1}{it(b-a)} [\exp(tai) - \exp(tbi)].$$

(b) Da Y und Z unabhängig, sind auch $\exp(itY)$ und $\exp(itZ)$ unabhängig. Damit folgt für $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{Y+Z}(t) = \mathbb{E}(\exp(it(Y+Z))) = \mathbb{E}(\exp(itY) \exp(itZ)) = \mathbb{E}(\exp(itY)) \mathbb{E}(\exp(itZ)) = \varphi_Y(t) \varphi_Z(t).$$

Es gilt nach VL $\mathbb{E}(\overline{Z}) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$, also folgt

$$\varphi_{-Y}(t) = \mathbb{E}(\exp(-itY)) = \mathbb{E}(\overline{\exp(itY)}) = \overline{\mathbb{E}(\exp(itY))} = \overline{\varphi_Y(t)}.$$

Seien nun Y, Z identisch verteilt. Dann ist $\varphi_Y = \varphi_Z$ und es folgt für $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{Y-Z}(t) = \varphi_Y \varphi_{-Y}(t) = \varphi_Y(t) \overline{\varphi_Y(t)} = |\varphi_Y(t)| \geq 0.$$

Aber $\varphi_X(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ für $X \sim U_{[-1,1]}$ und für $t = \frac{3}{2}\pi$ folgt $\varphi_X(\frac{3}{2}\pi) = -\frac{2}{3\pi} < 0$. Also ist $\varphi_X(t) \neq \varphi_{Y-Z}(t)$, also ist $Y - Z$ nicht $U_{[-1,1]}$ verteilt.(c) Es gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t).$$

Da $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) \neq 0$, folgt

$$\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = 1.$$

Setze $Z := 0$. Dann ist $\varphi_Z(t) = 1 \forall t \in \mathbb{R}$, also folgt

$$\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = \varphi_Z(t).$$

Betrachte nun $Y_n := X_1 \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $Y_n \xrightarrow{D} Z$. Da Z konstant, folgt damit auch $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$. Also $\forall \epsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_2| > \epsilon) = \mathbb{P}(|X_1| > \epsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y_n - Z| > \epsilon) = 0.$$

Da ϵ beliebig, folgt $\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 0) = 1$. Also $X_1 = 0 = X_2$ $\mathbb{P}$ f.s.**Aufgabe 43.** (a) Setze $Y_i(x) := \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}}$. Dann ist $Y_i(x) \sim \text{Bernoulli}_p$ mit:

$$p := \mathbb{P}(X_i \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \mathbb{F}(x).$$

Dann ist $n\hat{\mathbb{F}}_n(x) = \sum_{i=1}^n Y_i(x)$ und damit $n\hat{\mathbb{F}}_n(x) \sim \text{Bin}_{n,p}$ mit $p = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \mathbb{F}(x)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\mathbb{F}}_n(x)) &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(n\hat{\mathbb{F}}_n(x)) = \frac{1}{n} np = p = \mathbb{F}(x) \\ \text{Var}(\hat{\mathbb{F}}_n(x)) &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(n\hat{\mathbb{F}}_n(x)) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{\mathbb{F}(x)(1-\mathbb{F}(x))}{n}. \end{aligned}$$

(b) Es ist $\hat{\mathbb{F}}_n(x) = \bar{Y}_n(x)$. Also folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mathbb{F}}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n(x) \stackrel{\text{SGGZ}}{=} \mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{F}(x).$$

(c) Es gilt da $\text{Var}(Y_1) = p(1-p) = \mathbb{F}(x)(1-\mathbb{F}(x))$:

$$\sqrt{n}(\hat{\mathbb{F}}_n(x) - \mathbb{F}(x)) = \sqrt{n}(\bar{Y}_n(x) - \mathbb{F}(x)) \xrightarrow{\text{ZGWS}} N_{(0, \text{Var}(Y_1(x)))} = N_{(0, \mathbb{F}(x)(1-\mathbb{F}(x)))}.$$

Aufgabe 44. (a) Sei $b \in \mathbb{R}^+$. Dann ist

$$\text{Bias}_b(\hat{b}_n) = \mathbb{E}_b(\hat{b}_n - b) = 2\mathbb{E}_b(\bar{X}_n) - b = 2\mathbb{E}_b(X_1) - b = 0$$

$$\text{Var}_b(\hat{b}_n) = 4\text{Var}_b(\bar{X}_n) = \frac{4}{n}\text{Var}_b(X_1) = \frac{b^2}{3n}.$$

Setze $Y_i := 2X_i$. Dann ist $\bar{Y}_n = 2\bar{X}_n = \hat{b}_n$. Damit folgt mit ZGWS direkt

$$\sqrt{n}(\hat{b}_n - b) = \sqrt{n}(\bar{Y}_n - \mathbb{E}(Y_1)) \xrightarrow{D} N_{(0, \text{Var}(Y_1))} = N_{(0, b^2/3)}.$$

(b) Es ist $\hat{b}_n$ nach (a) $\sqrt{n}$ -konsistent. Außerdem ist mit (a), dass

$$\frac{\sqrt{3n}}{b}(\hat{b}_n - b) \xrightarrow{D} N_{(0,1)}.$$

Also ist $\frac{b}{\sqrt{3}}$ Störparameter. Da $\hat{b}_n = \bar{Y}_n$ und $\mathbb{E}(Y_1) = b$, folgt mit dem SGGZ, dass

$$\hat{b}_n = \bar{Y}_n \xrightarrow{\mathbb{P} \text{ f.s.}} \mathbb{E}(Y_1) = b.$$

Also insbesondere $\hat{b}_n$ konsistenter Schätzer für b und damit auch $\frac{\hat{b}_n}{\sqrt{3}}$ konsistenter Schätzer für den Störparameter $\frac{b}{\sqrt{3}}$. Damit folgt nach VL, dass $C_n^{(b)} := [\hat{b}_n - \frac{\hat{b}_n}{\sqrt{3n}}q_{1-\alpha}, \infty)$ ein $1-\alpha$ KB für die richtigen Parameter $\mathcal{R}_b = [b, \infty)$ ist, wobei $q_{1-\alpha}$ das $1-\alpha$ Quantil der Standardnormalverteilung ist.

(c) H_0 ist die assoziierte Nullhypothese zu $\mathcal{R}_{b_0}$. Damit folgt nach VL, da $C_n^{(b)}$ asympt. $1-\alpha$ -KB, dass

$$\phi_n^{(b)} = \mathbb{1}_{\{\hat{b}_n \notin C_n^{(b)}\}} = \mathbb{1}_{\{\hat{b}_n - \frac{\hat{b}_n}{\sqrt{3n}}q_{1-\alpha} > b_0\}}$$

ein asympt. $1-\alpha$ Test ist.

(d) Ausrechnen ergibt $\bar{X}_n = 50.88$ und damit

$$\hat{b}_{10} - \frac{\hat{b}_{10}}{\sqrt{3 \cdot 10}} 1.64 = 71.28 < 100 \quad C_{10}^{(b)} = [71.28, \infty).$$

Also sollte H_0 nicht abgelehnt werden.