

Aufgabe	A36	A37	A38	A39	Σ
Punkte					

Aufgabe 36. Sei $X \in \mathcal{A}^n$ die Flughöhe von n Barock-Raketen und $Y \in \mathcal{A}^m$ die Flughöhe von m Renaissance-Raketen. Laut Aufgabenstellung ist $(X, Y) \sim (N_{(\mu_B, \sigma^2)}^n \otimes N_{(\mu_R, \sigma^2)}^m)$. Sei außerdem $\mathcal{H}_0: \mu_B \geq \mu_R$. Nach Satz 26.43 hält dann der linksseitige Test

$$\varphi_c^l = \mathbb{1}_{\{\bar{X}_n - \bar{Y}_m \leq -c \frac{\sqrt{n+m}}{\sqrt{nm}} \hat{S}_{n,m}\}} = \mathbb{1}_{\left\{-\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\hat{S}_{n,m}} \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{n+m}} \geq c\right\}}$$

mit $c = t_{(n+m-2), (1-\alpha)}$ das Niveau α ein. Einsetzen aller Werte ergibt

$$-\frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{\hat{S}_{n,m}} \frac{\sqrt{nm}}{\sqrt{n+m}} \approx 0.941 < 1.734 = t_{18, 0.95}.$$

Also kann $\mathcal{H}_0$ nicht zum Signifikanzniveau 0.05 abgelehnt werden.

Aufgabe 38. Sei $X, X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P} \text{ f.s.}} X \implies X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ nach VL. Sei also $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. Sei weiter $\mathcal{X} := \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{P}(\omega) > 0\}$. Dann ist $\mathbb{P}(\Omega \setminus \mathcal{X}) = 0$. Es genügt also zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0$ für $\omega \in \mathcal{X}$. Sei dazu $\epsilon > 0$ und $\omega \in \mathcal{X}$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0$ ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n \geq n_0$:

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) < \mathbb{P}(\omega).$$

Damit folgt $\omega \notin \{|X_n - X| > \epsilon\}$, also $|X_n(\omega) - X(\omega)| = 0$.

Aufgabe 39. Zunächst berechne für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^U([n, \infty)) &= 1 - \mathbb{P}^U((-\infty, n)) = 1 - \int_0^n \exp(-v) \, dv = \exp(-n) \\ \mathbb{P}^V([n, \infty)) &= 1 - \mathbb{P}^V((-\infty, n)) = 1 - \int_1^n \frac{1}{v^2} \, dv = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(a) Sei $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \epsilon$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(n \mathbb{1}_{[n, \infty)}(U) > \epsilon) \stackrel{n > \epsilon}{=} \mathbb{P}(\mathbb{1}_{[n, \infty)}(U) > 0) = \mathbb{P}^U([n, \infty)) = \exp(-n).$$

Also folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = 0$ also $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Sei nun $\sqrt{n} > \epsilon$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(\sqrt{n} \mathbb{1}_{[n, \infty)}(V) > \epsilon) \stackrel{\sqrt{n} > \epsilon}{=} \mathbb{P}^V([n, \infty)) = \frac{1}{n}.$$

Also folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Y_n| > \epsilon) = 0$ also $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(b) Betrachte

$$\mathbb{E}(|X_n|^2) = \mathbb{E}(n^2 \mathbb{1}_{[n, \infty)}(U)) = n^2 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n, \infty)}(v) f^U(v) \, dv = n^2 \mathbb{P}^U([n, \infty)) = n^2 \exp(-n).$$

Betrachte $f(x) := x^2 \exp(-x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist durch mehrfache Anwendung von de l'Hospital (*):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\frac{1}{\exp(-x)}} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\exp(x)} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0.$$

Mit der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := n$ folgt also $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \exp(-n) = f(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Also folgt insgesamt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\|_{L^2} = 0$ und damit $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}_2} 0$.

Weiter folgt

$$\mathbb{E}(|Y_n|^2) = \mathbb{E}(n \mathbb{1}_{[n, \infty)}(V)) = n \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[n, \infty)}(v) f^V(v) \, dv = n \mathbb{P}^V([n, \infty)) = n \frac{1}{n} = 1.$$

Damit folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Y_n\|_{L^2} = \sqrt{1} = 1 \neq 0$. Da $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ konvergiert Y_n nicht in $\mathcal{L}_2$ gegen ein $Y \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $Y \neq 0$ $\mathbb{P}$ f.s., da sonst auch $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y \neq 0$ und stochastische Grenzwerte $\mathbb{P}$ f.s. übereinstimmen. Also konvergiert Y_n nicht in $\mathcal{L}_2$.