

Aufgabe	A9	A10	A11	Σ
Punkte				

Aufgabe 9. (a) Beh.: $C_{\alpha, x_m} = \alpha x_m^\alpha$.

Beweis. Es muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} C_{\alpha, x_m} x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x \geq x_m\}} dx &= \int_{x_m}^{\infty} C_{\alpha, x_m} x^{-(\alpha+1)} dx \\ &= C_{\alpha, x_m} \int_{x_m}^{\infty} x^{-(\alpha+1)} dx \\ &\stackrel{\alpha+1 > 1}{=} -C_{\alpha, x_m} \frac{1}{\alpha} x^{-\alpha} \Big|_{x_m}^{\infty} \\ &= -\frac{C_{\alpha, x_m}}{\alpha} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{-\alpha} - x_m^{-\alpha}] \\ &\stackrel{\alpha > 0}{=} \frac{C_{\alpha, x_m}}{\alpha} x_m^{-\alpha} \\ &\stackrel{!}{=} 1 \end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$C_{\alpha, x_m} = \alpha x_m^\alpha.$$

□

(b) Beh.: $\mathbb{F}(x) = \left(1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\{x \geq x_m > 0\}}$

Beweis. Falls $x < x_m$ ist $f(y) = 0 \forall y \leq x$, also $\mathbb{F}(x) = 0$. Sei also $x \geq x_m$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(x) &= \int_{x_m}^x \alpha x_m^\alpha y^{-(\alpha+1)} dy \\ &= -x_m^\alpha y^{-\alpha} \Big|_{x_m}^x \\ &= -x_m^\alpha [x^{-\alpha} - x_m^{-\alpha}] \\ &= -x_m^\alpha x^{-\alpha} + x_m^\alpha x_m^{-\alpha} \\ &= 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\mathbb{F}(x) = \left(1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\{x \geq x_m > 0\}}.$$

□

(c) Beh.: $\mathbb{P}([1, 2]) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}((2, \infty))$.

Beweis. Mit $\alpha = x_m = 1$ folgt $\mathbb{F}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathbb{1}_{\{x \leq 1\}}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([1, 2]) &= \mathbb{F}(2) - \mathbb{F}(1) = 1 - \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}((2, \infty)) &= 1 - \mathbb{P}((-\infty, 2]) = 1 - \mathbb{F}(2) = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 11. Zunächst ist zu bemerken, dass mit $\mathcal{E} := \{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ nach VL gilt $\sigma(\mathcal{E}) = \overline{\mathcal{B}}$. Damit ist $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

(a) (1) Sei $m \in \mathbb{N}$. Beh.: Folgende Abbildungen sind $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar:

(i) $\sup_{n \geq m} X_n: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

(ii) $\inf_{n \geq m} X_n: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$

Beweis. (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ bel. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\sup_{n \geq m} X^n(x) > a \iff \exists n \geq m: X^n(x) > a.$$

Damit folgt da X^n $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar und $\mathcal{A}$ σ -Algebra:

$$\begin{aligned} (\sup_{n \geq m} X_n)^{-1}((a, \infty]) &= \{x \in \Omega \mid \sup_{n \geq m} X^n(x) > a\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists n \geq m: X^n(x) > a\} \\ &= \bigcup_{n \geq m} \{x \in \Omega \mid X^n(x) > a\} \\ &= \bigcup_{n \geq m} \underbrace{(X^n)^{-1}((a, \infty])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Also $\sup_{n \geq m} X^n$ $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\inf_{n \geq m} X^n(x) < a \iff \exists n \geq m: X^n(x) < a.$$

Damit folgt da X^n $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar und $\mathcal{A}$ σ -Algebra:

$$\begin{aligned} (\inf_{n \geq m} X_n)^{-1}([-\infty, a)) &= \{x \in \Omega \mid \inf_{n \geq m} X^n(x) < a\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists n \geq m: X^n(x) < a\} \\ &= \bigcup_{n \geq m} \{x \in \Omega \mid X^n(x) < a\} \\ &= \bigcup_{n \geq m} \underbrace{(X^n)^{-1}([-\infty, a))}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Da auch $\sigma(\{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}) = \overline{\mathcal{B}}$ folgt also $\inf_{n \geq m} X^n$ $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar. □

(2) Beh.: $\limsup_{n \rightarrow \infty} X^n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} X^n$ sind $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar.

Beweis. Definiere $f_m := \sup_{n \geq m} X_n$. Dann ist f_m messbar nach (1)(i) und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \inf_{m \geq 1} \sup_{n \geq m} X_n = \inf_{m \geq 1} f_m$$

$(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar nach (1)(ii).

Definiere nun $h_m := \inf_{n \geq m} X_n$. h_m messbar nach (1) (ii) $\forall m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \sup_{m \geq 1} \inf_{n \geq m} X_n = \sup_{m \geq 1} h_m$$

$(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar nach (1)(i). □

(3) Beh.: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar.

Beweis. Sei $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$. Dann ist $X = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$, also X $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar nach (2). □

(b) Beh.: Y $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar.

Beweis. Beachte, dass es für $\mathcal{B}$ genügt, die offenen Intervalle (a, ∞) für $a \in \mathbb{R}$ zu betrachten.

Sei $a \in \mathbb{R}$ bel.

- Falls $a \leq 0$, dann ist $0, 1 \in (a, \infty)$, also $Y^{-1}((a, \infty)) = \Omega \in \mathcal{A}$.
- Falls $0 < a < 1$: Dann ist $1 \in (a, \infty)$ und $0 \notin (a, \infty)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} Y^{-1}((a, \infty)) &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) > X_2(\omega)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) - X_2(\omega) > 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid (X_1 - X_2)(\omega) \in (0, \infty]\} \\ &= (X_1 - X_2)^{-1}((0, \infty]). \end{aligned}$$

Da X_1, X_2 $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ -messbar, ist nach VL auch $X_1 - X_2$ $(\mathcal{A}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar. Da weiter $(0, \infty] \in \overline{\mathcal{B}}$, folgt also $(X_1 - X_2)^{-1}((0, \infty]) \in \mathcal{A}$.

- Falls $a \geq 1$, dann ist $0, 1 \notin (a, \infty)$, also $Y^{-1}((a, \infty)) = \emptyset \in \mathcal{A}$.

□