Aufgabe	A9	A10	A11	A12	$\sum$
Punkte					

Aufgabe 9. (a) Beh.: $C_{\alpha,x_m} = \alpha x_m^\alpha$.

Beweis. Es muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{f}(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} C_{\alpha,x_m} x^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{\{x\geq x_m\}}\,\mathrm{d}x &= \int_{x_m}^{\infty} C_{\alpha,x_m} x^{-(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= C_{\alpha,x_m} \int_{x_m}^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\alpha+1>1}{=} -C_{\alpha,x_m} \frac{1}{\alpha} x^{-\alpha}\Big|_{x_m}^{\infty} \\
&= -\frac{C_{\alpha,x_m}}{\alpha} \lim_{z\to\infty} \left[z^{-\alpha} - x_m^{-\alpha}\right] \\
&\overset{\alpha\geq 0}{=} \frac{C_{\alpha,x_m}}{\alpha} x_m^{-\alpha} \\
&\overset{!}{=} 1
\end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$C_{\alpha,x_m} = \alpha x_m^\alpha.$$

□

(b) Beh.: $\mathbb{F}(x) = \left(1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\{x\geq x_m>0\}}$

Beweis. Falls $x < x_m$ ist $\mathbb{f}(y) = 0\ \forall y \leq x$, also $\mathbb{F}(x) = 0$. Sei also $x \geq x_m$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(x) &= \int_{x_m}^{x} \alpha x_m^\alpha y^{-(\alpha+1)}\,\mathrm{d}y \\
&= -x_m^\alpha y^{-\alpha}\Big|_{x_m}^{x} \\
&= -x_m^\alpha \left[x^{-\alpha} - x_m^{-\alpha}\right] \\
&= -x_m^\alpha x^{-\alpha} + x_m^\alpha x_m^{-\alpha} \\
&= 1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\mathbb{F}(x) = \left(1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha\right) \mathbb{1}_{\{x\geq x_m>0\}}.$$

□

(c) Beh.: $\mathbb{P}([1,2]) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}((2,\infty))$.

Beweis. Mit $\alpha = x_m = 1$ folgt $\mathbb{F}(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathbb{1}_{\{x\leq 1\}}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([1,2]) &= \mathbb{F}(2) - \mathbb{F}(1) = 1 - \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2} \\
\mathbb{P}((2,\infty)) &= 1 - \mathbb{P}((-\infty,2]) = 1 - \mathbb{F}(2) = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 10. (a) Ein Neyman-Pearson-Test für dieses Testproblem ist gegeben durch die Funktion $\mathbb{1}_{A_k}$ mit

$$\begin{aligned} A_k &= \{x\colon \mathbb{p}_{\mathrm{Poi}_{\lambda_1}}(x) \geq \mathbb{p}_{\mathrm{Poi}_{\lambda_0}}(x)\} \\ &= \{x\colon e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{x!} \geq k e^{-\lambda_0}\frac{\lambda_0^x}{x!}\} \\ &= \{x\colon e^{\lambda_0-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{\lambda_0^x} \geq k\} \end{aligned}$$

Damit einer dieser Tests ein bester Test zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ ist, muss $\mathbb{P}_{\lambda_0}(A_k) = \alpha$ gelten.

(b) Da $e^{\lambda_0-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{\lambda_0^x}$ für $\lambda_1 > \lambda_0$ und $x > 0$ stets streng monoton wachsend ist und $\mathbb{P}_{\lambda_0}(A_k) = \alpha$ völlig unabhängig von λ_1 ist, muss jeder beste Test zum Niveau α auch ein gleichmäßig bester Test für H_0 gegen H_1' sein.

(c) Wählen wir $A = [9157, \infty)$ als Ablehnungsbereich, so erhalten wir

$$\mathbb{P}_0(A) = \sum_{k=9157}^{\infty} \frac{\lambda_0^k}{k!}e^{-\lambda_0} \leq 0.05.$$

Für ein beliebiges λ_1 existiert jetzt ein k derart, dass wir diesen Ablehnungsbereich als Neyman-Pearson-Test schreiben können.

$$\{x\colon e^{\lambda_0-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{\lambda_0^x} \geq k\} = \{9157, \ldots\}.$$

Aufgabe 11. Zunächst ist zu bemerken, dass mit $\mathscr{E} := \{(a,\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ nach VL gilt $\sigma(\mathscr{E}) = \overline{\mathscr{B}}$. Damit ist $f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$ messbar, wenn $f^{-1}(\mathscr{E}) \subseteq \mathscr{A}$.

(a) (1) Sei $m \in \mathbb{N}$. Beh.: Folgende Abbildungen sind $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$ messbar:

(i) $\sup_{n\geq m} X_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

(ii) $\inf_{n\geq m} X_n\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$

Beweis. (i) Sei $a \in \mathbb{R}$ bel. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\sup_{n\geq m} X^n(x) > a \iff \exists n \geq m\colon X^n(x) > a.$$

Damit folgt da X^n $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar und $\mathscr{A}$ σ-Algebra:

$$\begin{aligned} (\sup_{n\geq m} X_n)^{-1}((a,\infty])) &= \{x \in \Omega \mid \sup_{n\geq m} X^n(x) > a\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists n \geq m\colon X^n > a\} \\ &= \bigcup_{n\geq m} \{x \in \Omega \mid X^n(x) > a\} \\ &= \bigcup_{n\geq m} \underbrace{(X^n)^{-1}((a,\infty])}_{\in\mathscr{A}} \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Also $\sup_{n\geq m} X^n$ $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar.

(ii) Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\inf_{n\geq m} X^n(x) < a \iff \exists n \geq m\colon X^n(x) < a.$$

Damit folgt da X^n $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar und $\mathscr{A}$ σ-Algebra:

$$\begin{aligned} (\inf_{n\geq m} X_n)^{-1}([-\infty,a)) &= \{x \in \Omega \mid \inf_{n\geq m} X^n(x) < a\} \\ &= \{x \in \Omega \mid \exists n \geq m\colon X^n < a\} \\ &= \bigcup_{n\geq m} \{x \in \Omega \mid X^n(x) < a\} \\ &= \bigcup_{n\geq m} \underbrace{(X^n)^{-1}([-\infty,a))}_{\in\mathscr{A}} \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Da auch $\sigma(\{[-\infty,a) \mid a \in \mathbb{R}\}) = \overline{\mathscr{B}}$ folgt also $\inf_{n\geq m} X^n$ $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar.

□

(2) Beh.: $\limsup_{n\to\infty} X^n$ und $\liminf_{n\to\infty} X^n$ sind $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar.

Beweis. Definiere $f_m := \sup_{n\geq m} X_n$. Dann ist f_m messbar nach (1)(i) und

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = \inf_{m\geq 1} \sup_{n\geq m} X_n = \inf_{m\geq 1} f_m$$

$(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar nach (1)(ii).
Definiere nun $h_m := \inf_{n\geq m} X_n$. h_m messbar nach (1) (ii) $\forall m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \sup_{m\geq 1} \inf_{n\geq m} X_n = \sup_{m\geq 1} h_m$$

$(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar nach (1)(i). □

(3) Beh.: $\lim_{n\to\infty} X_n$ $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar.

Beweis. Sei $X = \lim_{n\to\infty} X_n$. Dann ist $X = \liminf_{n\to\infty} X_n = \limsup_{n\to\infty} X_n$, also X $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar nach (2). □

(b) Beh.: Y $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-messbar.

Beweis. Beachte, dass es für $\mathscr{B}$ genügt, die offenen Intervalle (a, ∞) für $a \in \mathbb{R}$ zu betrachten. Sei $a \in \mathbb{R}$ bel.

- Falls $a \leq 0$, dann ist $0, 1 \in (a, \infty)$, also $Y^{-1}((a, \infty)) = \Omega \in \mathscr{A}$.
- Falls $0 < a < 1$: Dann ist $1 \in (a, \infty)$ und $0 \notin (a, \infty)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} Y^{-1}((a,\infty)) &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) > X_2(\omega)\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) - X_2(\omega) > 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid (X_1 - X_2)(\omega) \in (0, \infty]\} \\ &= (X_1 - X_2)^{-1}((0, \infty]). \end{aligned}$$

Da X_1, X_2 $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$-messbar, ist nach VL auch $X_1 - X_2$ $(\mathscr{A}, \overline{\mathscr{B}})$ messbar. Da weiter $(0, \infty] \in \overline{\mathscr{B}}$, folgt also $(X_1 - X_2)^{-1}((0, \infty]) \in \mathscr{A}$.

- Falls $a \geq 1$, dann ist $0, 1 \notin (a, \infty)$, also $Y^{-1}((a, \infty)) = \infty \in \mathscr{A}$.

□

Aufgabe 12. (a) Sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Sei dann $A := f^{-1}([a, n])$ und $\alpha \in U_\epsilon(\inf A) \cap A$ sowie $\beta \in U_\epsilon(\sup A) \cap A$. Für beliebiges $\alpha \leq x \leq \beta$ folgt aufgrund der Monotonie $a \leq f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta) \leq b$, also $f(x) \in [a, b]$ und damit $x \in A$. Also muss A ein Intervall sein und damit wieder in $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ liegen. Da die Menge aller Intervalle $[a, b]$ bereits ein Erzeuger von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ ist, folgt daraus bereits die Messbarkeit.

(b) Da $g(s, x)$ Riemann-integrierbar in x ist, konvergiert die Folge

$$S_{Z_n}(s) = \sum_{k=1}^{n} g(s, x_k^n)(x_k^n - x_{k-1}^n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 g(s, x)\,\mathrm{d}x\,,$$

wobei $Z_n = (x_1^n, \ldots, x_n^n), x_i^j \in \mathbb{R} \forall i, j$ eine Partition sei, sodass $\max_{i\in[2,n]\cap\mathbb{N}} |x_i^n - x_{i-1}^n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt. Wegen $g(s, x_k^n)$ stetig $\forall n, k \in \mathbb{N}$ muss auch S_{Z_n} stetig und damit $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$-messbar sein. Nach Aufgabe 11 ist damit $\lim\limits_{n\to\infty} S_{Z_n}$ $(\mathscr{B}, \mathscr{B})$-messbar.

(c) Wähle ein $A \in 2^{\mathbb{R}}$ sodass $A \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$ und

$$\kappa \colon x \mapsto \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor & x \in A \\ x + 1 & x \in [0, 1) \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt $\forall c \in [0, 1)\colon \kappa^{-1}(c) = \{c, c+1, c-1, \ldots\} \cap A$, insbesondere ist $\kappa^{-1}(c)$ abzählbar. Für $x \in [1, 2)$ ist $\kappa^{-1}(c) \subset \{c, c-1\}$. Für $x \in A \cap [0, 2)^c$ ist $\kappa^{-1}(c)$ einfach die leere Menge. Für $x \in A^c \cap [0, 2)^c$ ist $\kappa^{-1}(c) = \{c\}$. Damit liegt $\kappa^{-1}(c)$ stets in $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ und die Bedingung an κ ist erfüllt. Dennoch ist $\kappa^{-1}([0, 1)) = A$ und $A \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$.