

Aufgabe	A13	A14	A15	Σ
Punkte				

Aufgabe 13. (a) Beh.: $\mathbb{P}^X$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

Beweis. (i) Es ist $\mathbb{P}^X \geq 0$, da $\mathbb{P} \geq 0$.

(ii) $\mathbb{P}^X(\mathcal{X}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\mathcal{X})) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, da $\mathbb{P}$ W-Maß.

(iii) Zunächst ist für $A, B \subseteq \mathcal{X}$ mit $A \cap B = \emptyset$ auch $X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B) = X^{-1}(A \cap B) = X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Also bleiben disjunkte Vereinigungen unter Urbildbildung disjunkt (*).

Seien nun $B_i \in \mathcal{B}$ für $i \in \mathbb{N}$ und paarweise verschieden. Dann folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^X\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right)\right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{X^{-1}(B_i)}_{\in \mathcal{A}}\right) \\
 &\stackrel{\mathbb{P} \text{ Maß}}{=} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X^{-1}(B_i)) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^X(B_i).
 \end{aligned}$$

□

(b) Beh.: $(\mathbb{P}^X)^Y = \mathbb{P}(Y \circ X)$.

Beweis. Sei $C \in \mathcal{C}$.

$$\begin{aligned}
 Y^{-1}(X^{-1}(C)) &= \{x \in \Omega \mid X(x) \in \{y \in \mathcal{X} \mid Y(y) \in C\}\} \\
 &= \{x \in \Omega \mid Y(X(x)) \in C\} \\
 &= (Y \circ X)^{-1}(C).
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$(\mathbb{P}^X)^Y(C) = \mathbb{P}^X(Y^{-1}(C)) = \mathbb{P}(X^{-1}(Y^{-1}(C))) = \mathbb{P}((Y \circ X)^{-1}(C)) = \mathbb{P}^{(Y \circ X)}(C).$$

□

(c) Beh.: Es ist

$$\mathbb{P}^X(\{0\}) = \frac{4}{7} \quad \mathbb{P}^X(\{1\}) = \frac{2}{7} \quad \mathbb{P}^X(\{2\}) = \frac{1}{7}.$$

Damit ist $\mathbb{P}^X$ eindeutig festgelegt.

Beweis. Es ist $\text{Bild}(X) = \{0, 1, 2\}$. Damit ist $(\text{Bild}(X), 2^{\text{Bild}(X)}, \mathbb{P}^X)$ diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Es genügt also $\mathbb{P}^X$ für alle Elementarereignisse zu bestimmen.

Damit folgt mit geometrischer Reihe

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^X(\{0\}) &= \mathbb{P}(X^{-1}(\{0\})) = \mathbb{P}(3\mathbb{N}_0) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-3k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{7} \\
 \mathbb{P}^X(\{1\}) &= \mathbb{P}(3\mathbb{N}_0 + 1) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-3k-1-1} = \frac{2}{7} \\
 \mathbb{P}^X(\{2\}) &= \mathbb{P}(3\mathbb{N}_0 + 2) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} 2^{-3k-2-1} = \frac{1}{7}.
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 15. (a) Beh.: $\forall y \in [0, 1], z \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{F}^*(y) \leq z \iff y \leq \mathbb{F}(z)$.

Beweis. Sei $y \in [0, 1]$ und $z \in \mathbb{R}$.

- „ $\implies$ “. Sei also $\mathbb{F}^*(y) \leq z$. Da $\mathbb{F}$ monoton wachsend, folgt direkt $\mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)) \leq \mathbb{F}(z)$. Also genügt es z.z.: $y \leq \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y))$. Betrachte dazu $x_n := \mathbb{F}^*(y) + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach der Definition von $\mathbb{F}^*(y)$ folgt $\mathbb{F}(x_n) \geq y \forall n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $x_n \downarrow \mathbb{F}^*(y)$ für $n \rightarrow \infty$. Mit der Rechtsstetigkeit von $\mathbb{F}$ folgt damit $\mathbb{F}(x_n) \downarrow \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y))$. Das heißt für $\epsilon > 0$ ex. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, s.d. $\forall n \geq n_0$ gilt, dass $|\mathbb{F}(x_n) - \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y))| < \epsilon$. Da $\mathbb{F}$ monoton wachsend und $x_n \geq \mathbb{F}^*(y)$ folgt

$$\mathbb{F}(x_n) = \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)) + \epsilon$$

Also da $y \leq \mathbb{F}(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$

$$y \leq \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y)) + \epsilon.$$

Mit $\epsilon \rightarrow 0$ folgt $y \leq \mathbb{F}(\mathbb{F}^*(y))$ und damit die Behauptung.

- „ $\impliedby$ “. Sei also $y \leq \mathbb{F}(z)$. Dann folgt direkt

$$\mathbb{F}^*(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{F}(x) \geq y\} \leq z.$$

□

(b) Beh.: Ist $Y \sim U[0, 1]$ dann hat $\mathbb{F}^*(Y)$ dieselbe Verteilung wie X .

Beweis. Sei $Y \sim U[0, 1]$. Dann ist $Y(\omega) \in [0, 1] \forall \omega \in \Omega$ und es folgt für $z \in \mathbb{R}$ aus (a), dass $\mathbb{F}^*(Y(\omega)) \leq z \iff Y(\omega) \leq \mathbb{F}(z) \forall \omega \in \Omega$ und damit

$$\mathbb{F}^*(Y) \leq z \iff Y \leq \mathbb{F}(z) \quad (*).$$

Außerdem gilt für $y \in [0, 1]$ da $Y \sim U[0, 1]$

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = y \quad (**).$$

Damit folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(\mathbb{F}^*(Y) \leq x) \stackrel{(*)}{=} \mathbb{P}(Y \leq \mathbb{F}(x)) \stackrel{(**)}{=} \mathbb{F}(x).$$

Also sind $\mathbb{F}^*(Y)$ und $\mathbb{F}$ identisch verteilt.

□

(c) Sei $\lambda > 0$. Beh.:

$$G(x) := \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x) & x \in [0, 1) \\ \infty & x = 1 \end{cases}.$$

Beweis. Es ist $X \sim \text{Exp}_\lambda$. Also definiere

$$\begin{aligned} \mathbb{F}: (0, \infty) &\rightarrow [0, 1) \\ x &\mapsto \mathbb{F}^X(x) = \mathbb{F}_{\text{Exp}_\lambda}(x) = 1 - \exp(-\lambda x). \end{aligned}$$

Dann ist $\mathbb{F}$ invertierbar und es gilt $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}^{-1}$ auf $(0, 1)$. Weiter ist

$$\mathbb{F}^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-x) \quad x \in [0, 1).$$

Wähle dann G wie in Beh. Dann ist $G = \mathbb{F}^*$ auf $(0, 1)$ und $G(0) = 0 = \inf\{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid \mathbb{F}(x) \geq 0\} = \mathbb{F}^*(0)$. Außerdem gilt $\mathbb{F}^*(1) = \inf\{x \in \mathbb{R}_0^+ \mid \mathbb{F}(x) = 1\} = \infty = G(1)$. Damit folgt die Behauptung aus (b).

□