

Aufgabe	A29	A30	A31	A32	Σ
Punkte					

Aufgabe 29. (i) Es ist $|X_n| \in \mathcal{A}^+$, damit folgt

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

Damit folgt mit 20.13. $\mathbb{P} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| = \infty \right) = 0$ und damit

$$\mathbb{P} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| < \infty \right) = 1.$$

(ii) Es ist analog zu (i)

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \right| \right) \leq \mathbb{E} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty.$$

Also $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \mathcal{L}_1$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \in \mathcal{L}_1$.

(iii) Setze $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \in \bar{\mathcal{A}}$ und

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n X_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |X_k| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \in \mathcal{L}_1.$$

Insbesondere folgt $\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |X_n| \in \mathcal{L}_1$.

Wegen Monotonie der Erwartung

$$\mathbb{E}(|S_n|) \leq \mathbb{E} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |X_k| \right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_k|) < \infty.$$

Also ist $S_n \in \mathcal{L}_1$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt mit dominierter Konvergenz im letzten Schritt:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_n) \\ &\stackrel{\text{Linearität}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n X_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(S_n) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 30. (a) a

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(X > y) \, dy \\ &= \int_0^\infty \int_y^\infty \mathbb{f}^X(\omega) \, d\omega \, dy \\ &= \int_0^\infty \int_y^\infty \lambda e^{-\lambda x} \, dx \, dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda y} \, dy \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}^X(k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^{k-1} p \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k
\end{aligned}$$

geometrische Reihe

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}
\end{aligned}$$

geometrische Reihe

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Aufgabe 31. (a) Es ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = 0 \\
\stackrel{(X - \mathbb{E}(X))^2 \in \overline{\mathcal{A}}^+}{=} 1 &= \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 = 0) = \mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) = 0) = \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)).
\end{aligned}$$

(b) • Es gilt nach Definition

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\text{ov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] \\
&= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(X - \mathbb{E}(X))] \\
&= \mathbb{C}\text{ov}(Y, X).
\end{aligned}$$

• Mit Linearität der Erwartung folgt direkt

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\text{ov}(aX + bY, Z) &= \mathbb{E}[(aX + bY - \mathbb{E}(aX + bY))(Z - \mathbb{E}(Z))] \\
&= \mathbb{E}[(a(X - \mathbb{E}(X)) + b(Y - \mathbb{E}(Y)))(Z - \mathbb{E}(Z))] \\
&= a\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Z - \mathbb{E}(Z))] + b\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y))(Z - \mathbb{E}(Z))] \\
&= a\mathbb{C}\text{ov}(X, Z) + b\mathbb{C}\text{ov}(Y, Z).
\end{aligned}$$

• Mit Monotonie der Erwartung im letzten Schritt folgt

$$\mathbb{C}\text{ov}(X, X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))] = \mathbb{E}[\underbrace{(X - \mathbb{E}(X))^2}_{\geq 0}] \geq 0.$$

• Es gilt $\mathbb{E}(a) = a$, also

$$\mathbb{C}\text{ov}(a, X) = \mathbb{E}[(a - \mathbb{E}(a))(X - \mathbb{E}(X))] = \mathbb{E}(0) = 0.$$

(c) • Mit der Linearität der Kovarianz und der letzten Eigenschaft in (b) folgt sofort

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\text{ar}(aX + b) &= \mathbb{C}\text{ov}(aX + b, aX + b) \\
&\stackrel{\text{linear}}{=} a\mathbb{C}\text{ov}(X, aX + b) + \underbrace{\mathbb{C}\text{ov}(b, aX + b)}_{=0 \text{ (b.4)}} \\
&\stackrel{\text{linear}}{=} a^2\mathbb{C}\text{ov}(X, X) + \underbrace{\mathbb{C}\text{ov}(X, b)}_{=0 \text{ (b.4)}} \\
&= a^2\mathbb{V}\text{ar}(X).
\end{aligned}$$

- Mit Linearität und Symmetrie folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{V}\text{ar}(X + Y) &= \mathbb{C}\text{ov}(X + Y, X + Y) \\ &= \mathbb{C}\text{ov}(X, X) + \mathbb{C}\text{ov}(X, Y) + \mathbb{C}\text{ov}(Y, X) + \mathbb{C}\text{ov}(Y, Y) \\ &= \mathbb{V}\text{ar}(X) + \mathbb{V}\text{ar}(Y) + 2\mathbb{C}\text{ov}(X, Y).\end{aligned}$$

Aufgabe 32. (a) Wir definieren den Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = \{(i_1, \dots, i_n) | i_j \in \{1, \dots, m\}\}$ als die Menge aller n -Tupel mit Werten zwischen 1 und m , wobei das j -te Element eines Tupels angibt, welche Ente der j -te Jäger gewählt hat. Dann enthält das Ereignis

$$A_i := \{(i_1, \dots, i_n) \in \Omega, i \neq i_l \forall l \in \{1, \dots, n\}\}$$

alle Elementarereignisse, in denen die i -te Ente nicht getroffen wird. Die Zufallsvariable $X_i: \Omega \rightarrow \{0, 1\}, \omega \mapsto \mathbb{1}_{A_i}$ gibt an, ob die i -te Ente überlebt (1) oder nicht (0). Dann ist durch $X := \sum_{i=1}^m X_i$ gerade die Anzahl der überlebenden Enten gegeben. Es gilt aufgrund der Linearität des Erwartungswerts

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\#A_i}{\#\Omega} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{(m-1)^n}{m^n} \\ &= m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n\end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen zunächst

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i X_j) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{A_j}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_i \cap A_j}) \\ &= \mathbb{P}(A_i \cap A_j)\end{aligned}$$

Für $i = j$ gilt $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) = m \left(\frac{m-1}{m}\right)^n$. Sei also $i \neq j$

$$\begin{aligned}&= \frac{\#A_i \cap A_j}{\#\Omega} \\ &= \left(\frac{m-2}{m}\right)^n\end{aligned}$$

Es gilt daher

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^m X_i \sum_{j=1}^m X_j\right) - \mathbb{E}(X)^2 \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{i,j=1}^m X_i X_j\right) - \mathbb{E}(X)^2 \\
 &= \sum_{i,j=1}^m \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^m \mathbb{E}(X_i X_i) + \sum_{i \neq j, 1 \leq i, j \leq m} \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X)^2 \\
 &= m \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^n + (m^2 - m) \left(\frac{m-2}{m}\right)^2 - m^2 \cdot \left(\frac{m-1}{m}\right)^{2n}
 \end{aligned}$$

(c) Für $n = m = 50$ gilt $7^{-2}\text{Var}(X) \approx 0.0996$ und $\mathbb{E}(X) \approx 18.2$. Für $m_1 = 11, m_2 = 26$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X \in [m_1, m_2]) &\geq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \leq 7) \\
 &= 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 7)
 \end{aligned}$$

Ungleichung von Tschebycheff

$$\begin{aligned}
 &\geq 1 - 7^{-2}\text{Var}(X) \\
 &\geq 1 - 0.0996 \\
 &\geq 0.9
 \end{aligned}$$